



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO  
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali  
Corso di laurea in Fisica

**Modello unidimensionale per lo studio  
dell'espansione di condensati di Bose-Einstein  
da reticoli ottici**

*Relatore interno:* Dott. Nicola Piovella  
*Correlatore interno:* Ch.mo Prof. Rodolfo Bonifacio  
*Relatore esterno:* Ch.mo Prof. Massimo Inguscio  
*Correlatore esterno:* Dott. Michele Modugno

PACS: 03.75.Fi, 05.30.Jp

Tesi di laurea di:  
Pietro Alberto Massignan  
matr. 588324

Anno Accademico 2000-2001



## Ringraziamenti



Questo lavoro di Tesi è stato svolto presso il Laboratorio Europeo di Spettroscopie Non Lineari (LENS) di Firenze; la grande competenza di tutti i membri, la calorosa accoglienza e l'infinita disponibilità riservatami hanno reso questo lavoro molto piacevole e stimolante, oltre che utilissimo per la mia formazione.

Grazie ai miei genitori per avermi supportato nelle mie aspirazioni e nei miei desideri in tutti questi anni,

grazie a Filippo, Luigi e Max per avermi semplicemente sopportato.



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Condensazione di Bose-Einstein</b>	<b>7</b>
2.1	Gas ideale . . . . .	8
2.2	Gas di bosoni debolmente interagenti . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Potenziali ottici e magnetici</b>	<b>19</b>
3.1	Interazione radiazione-materia . . . . .	19
3.2	Manipolazione dei gradi di libertà atomici . . . . .	21
3.3	Tecniche di intrappolamento e raffreddamento . . . . .	23
3.3.1	Trappole magneto-ottiche . . . . .	23
3.3.2	Trappole puramente ottiche . . . . .	24
3.3.3	Trappole puramente magnetiche . . . . .	25
3.3.4	Raffreddamento evaporativo . . . . .	25
3.4	Reticoli ottici . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Riduzione di dimensionalità</b>	<b>29</b>
4.1	Condensati ad auto-interazione molto debole . . . . .	30
4.2	Ipotesi di costanza delle dimensioni lineari . . . . .	31
4.3	Ipotesi gaussiana nella direzione trasversale . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Evoluzione in potenziali dipendenti dal tempo</b>	<b>37</b>
5.1	Riscaldamento dinamico del reticolo . . . . .	37
5.2	Equazione unidimensionale di evoluzione . . . . .	40
<b>6</b>	<b>Analisi numerica</b>	<b>47</b>
6.1	Ricerca dello stato fondamentale . . . . .	47
6.2	Fast Fourier Transform ed evoluzione temporale . . . . .	49
6.3	Risoluzione delle equazioni per i parametri di scala . . . . .	51
<b>7</b>	<b>Studio dell'espansione da reticolo</b>	<b>53</b>
7.1	Descrizione dell'esperimento . . . . .	53
7.2	Modello originale . . . . .	55
7.3	Applicazione della $dr$ -GPE a condensati in reticoli . . . . .	58

---

7.3.1	Stato fondamentale . . . . .	58
7.3.2	Espansione libera . . . . .	65
<b>8</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>73</b>
<b>A</b>	<b>Deduzione dell' Ansatz di scala</b>	<b>75</b>
<b>B</b>	<b>Approssimazione <math>\nabla^2\phi \approx \nabla_{\perp}^2\phi</math></b>	<b>77</b>
<b>C</b>	<b>Funzionale energia della <math>dr</math>-GPE</b>	<b>79</b>
<b>D</b>	<b><math>\langle R_{\perp}^2 \rangle</math> in approssimazione di TF</b>	<b>81</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>83</b>

# Capitolo 1

## Introduzione

Fin dalla sua introduzione agli albori della meccanica quantistica [Bos24, Ein24], la condensazione di Bose-Einstein suscitò una vastissima eco per il suo carattere fortemente interdisciplinare: la meccanica quantistica la interpreta come una sovrapposizione macroscopica e coerente delle onde di de Broglie associate ai singoli atomi, dal punto di vista della statistica quantistica molti atomi si trovano ad occupare la stessa cella dello spazio delle fasi, in termodinamica e teoria dei campi essa si presenta come una transizione di fase caratterizzata da rottura di simmetria.

Fenomeni affascinanti ed inizialmente inspiegabili quali la superfluidità e la superconduttività furono in seguito interpretati in termine di una condensazione parziale dei componenti del sistema: la natura fortemente interagente di questi sistemi non ha tuttavia permesso di identificare al loro interno in modo chiaro il ruolo giocato dalla condensazione di Bose-Einstein.

Lo sviluppo della teoria di campo a molti corpi e l'introduzione del concetto di fenomeno critico tra la fine degli anni '50 e l'inizio degli anni '60 risvegliarono l'interesse dei fisici teorici sulla condensazione, portandoli ad elaborare un modello destinato ad interpretare il comportamento di un sistema di bosoni debolmente interagenti; per lungo tempo questo apparato teorico, di per sè interessante e completo, rimase tuttavia sulla carta, data l'impossibilità sperimentale di realizzare un sistema fisico a cui adattarlo.

La messa a punto delle tecniche di manipolazione dei gradi di libertà atomici attraverso radiazione elettromagnetica permise di effettuare un numero sempre maggiore di accurati esperimenti su gas confinati di atomi molto freddi; infine nell'estate del 1995, quasi contemporaneamente tre gruppi sperimentali annunciarono di aver raggiunto la condensazione di un gas di atomi alcalini: al JILA in un campione di  $^{87}\text{Rb}$  [AEM95], al MIT in  $^{23}\text{Na}$  [DMA95] e alla Rice University in  $^7\text{Li}$  [BST95].

Gli atomi alcalini occupano un posto di primaria importanza all'interno dell'ottica quantistica ed atomica (ad esempio in elettrodinamica quantistica in cavità o negli esperimenti su ioni intrappolati) in quanto possiedono una

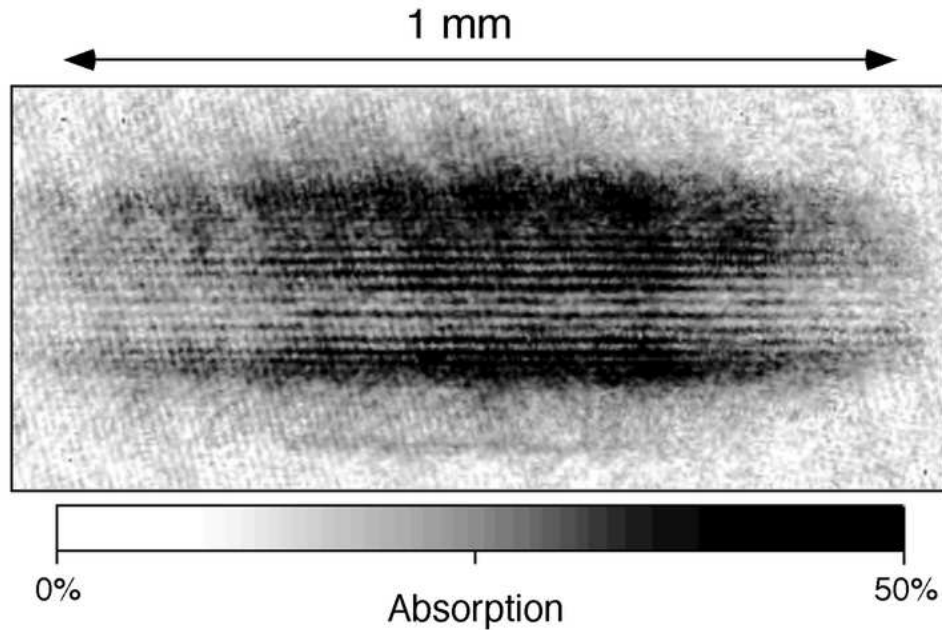


Figura 1.1: Interferenza atomica generata da due condensati, inizialmente separati, sovrapposti in seguito ad un'espansione libera di 40 ms. La larghezza della figura è di 1.1 mm e le frange, tra loro spaziate di  $15 \mu\text{m}$ , indicano la coerenza del condensato di Bose-Einstein su tutta la sua lunghezza. Figura tratta da [ATM97].

struttura elettronica che ben si presta a manipolazioni sperimentali; la presenza di un solo elettrone li rende molto semplici da studiare, possono essere intrappolati per mezzo del loro momento magnetico e presentano transizioni adatte ai laser attualmente disponibili: le tecniche di raffreddamento e manipolazione magneto-ottiche trovano dunque una collocazione ideale in seno a questi gas.

L'osservazione della condensazione di Bose-Einstein è stata ad oggi confermata da più di venti gruppi nel mondo e moltissimi esperimenti hanno indagato le proprietà termodinamiche, lo spettro delle eccitazioni, l'interazione coerente luce-materia, i fenomeni di superfluidità e trasporto di materia.

Il grande interesse suscitato dai condensati verte sulla loro natura contemporaneamente macroscopica e quantistica: esperimenti di interferenza atomica (vedi fig. 1.1) hanno dimostrato che questi sistemi, la cui dimensione a seguito di un espansione è dell'ordine di  $0.1 \sim 1 \text{ mm}$ , possiedono una coerenza estesa su tutta la loro lunghezza. Per la prima volta si hanno a disposizione dei sistemi quantistici "visibili" e "complessi", ovvero costituiti da un numero consistente di particelle (compreso tra qualche migliaio e qualche



milione), che tuttavia possono essere analizzati sorprendentemente bene da una teoria di campo medio, relativamente semplice da derivare, interpretare e risolvere.

Questi sistemi “mettono a nudo” la natura ondulatoria della materia, permettendo esperimenti spettacolari di interferenza, diffrazione e amplificazione, in modo assolutamente speculare alle esperienze già note in ottica classica<sup>1</sup>. Particolare attenzione ha suscitato presso la comunità scientifica la realizzazione del laser ad atomi, ovvero di una sorgente di materia coerente; vari gruppi nel mondo si stanno impegnando in questo campo e, ad oggi, ne sono state implementate varie versioni: a partire dai primi prototipi impulsati, realizzati al MIT [MAK97] e a Yale [AK98], si è ora giunti, nell’esperimento realizzato all’MPQ di Monaco [BHE99], ad un laser funzionante in modalità continua.

Come noto, i potenziali periodici sono in grado di rivelare in maniera molto appariscente le proprietà legate alla coerenza di fase: ad esempio in spettroscopia si fa uso di lastre serigrafate con sottili righe parallele (i cosiddetti reticoli di diffrazione) per scomporre spazialmente un fascio di luce nelle sue componenti in frequenza. Perseguendo l’analogia luce-materia predetta dal dualismo onde-corpuscoli e la specularità in esso insita, è possibile impiegare reticoli ottici, costituiti da un fascio laser retroriflesso a formare un’onda stazionaria, per effettuare la diffrazione di un sistema di particelle; in un recente esperimento [KDH99] ad esempio un condensato illuminato da un impulso breve ed intenso di onda stazionaria viene proiettato in una sovrapposizione di stati, ciascuno caratterizzato da un momento  $p = n \cdot 2\hbar k$  (con  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ): allo spegnimento della trappola si possono notare vari ordini di diffrazione, costituiti da frazioni del condensato che espandono con moto rettilineo uniforme.

Uno schema alternativo è stato realizzato al LENS di Firenze [PPS01]: il gas viene fatto condensare all’interno di un potenziale combinato, costituito da una parte armonica (necessaria per confinare il gas) e da una parte periodica unidimensionale “infinita”, che si estende ben oltre la lunghezza del condensato: nello stato fondamentale, il sistema si frammenta dunque in circa 200 dischi allineati e spazialmente separati, legati tuttavia da una ben determinata relazione di fase. Poiché la distribuzione dei momenti è costituita da una serie di picchi equispaziati e molto stretti, anche in questo caso il sistema, allo spegnimento della trappola, evolve frammentandosi in pacchetti separati che evolvono con moto rettilineo uniforme in direzioni opposte, con momento quantizzato.

Se osservati all’interno della trappola, i gas condensati costituiscono in realtà sistemi mesoscopici, al limite della risoluzione ottica (hanno dimensioni tipiche dell’ordine di  $5 \sim 50 \mu\text{m}$ ). Sono disponibili in letteratura varie

---

<sup>1</sup>Una rassegna completa delle esperienze ad oggi realizzate con i condensati può essere trovata in [CBY01, PW98, Gri99, KDS-K99, TI99, DGPS99].

immagini di condensati fotografati *in situ* (ovvero nello stato fondamentale della trappola), ma molto più spesso il sistema viene osservato in seguito ad una espansione balistica, ottenuta spegnendo il potenziale confinante e lasciando evolvere liberamente il gas per tempi compresi fra 10 e 50 ms: in questo modo la funzione d'onda descrivente il condensato aumenta le proprie dimensioni in maniera considerevole e permette una migliore risoluzione sperimentale. L'espansione consente inoltre di trasferire nello spazio delle coordinate caratteristiche proprie dello spazio degli impulsi, quali le differenze di fase, responsabili dei fenomeni di interferenza e diffrazione.

Nelle esperienze effettuate con reticoli ottici in particolare il carattere mesoscopico del condensato rende necessaria l'espansione del sistema per poterne effettuare l'analisi: l'utilizzo dei comuni laser permette infatti di costruire reticoli nei quali la distanza fra le singole buche (e dunque la dimensione dei sottosistemi) è dell'ordine di 400 nm, ben inferiore alle possibili risoluzioni attuali; risulta dunque necessario un modello che sia in grado di descrivere con completezza l'espansione libera di un condensato, eventualmente preparato secondo le esigenze del particolare esperimento.

L'equazione di Gross-Pitaevskii è sempre stata in grado di analizzare in modo molto accurato i risultati sperimentali finora ottenuti: essendo tuttavia un'equazione alle derivate parziali (di Schrödinger) non lineare, essa non ammette soluzioni analitiche e non risulta separabile (ovvero non possiede soluzioni fattorizzate esatte). La simulazione computazionale è semplice da implementare, ma una risoluzione del problema tridimensionale completo risulta spesso onerosa, specialmente quando la densità del condensato presenta variazioni spaziali su piccola scala; in questo caso infatti, per effettuare una buona descrizione del sistema, il vettore di stato deve essere rappresentato numericamente su un reticolo discreto caratterizzato da un numero elevato di punti.

Poichè in molti esperimenti la dinamica non banale del sistema è essenzialmente localizzata in una sola dimensione, è interessante la ricerca di un modello unidimensionale che sia in grado di descrivere accuratamente il sistema; generalmente questo comporta delle assunzioni, e quindi delle approssimazioni, ma può portare ad una notevole semplificazione del problema.

Nel corso di questa Tesi sviluppiamo così un nuovo modello in grado di descrivere l'espansione di un condensato inizialmente confinato in una trappola armonica "a forma di sigaro" (ovvero a simmetria cilindrica, allungata nella direzione assiale), alla quale può essere aggiunta una componente unidimensionale periodica. A partire da un modello unidimensionale recentemente introdotto in letteratura [Sal01, SPR02] ipotizziamo la fattorizzazione della funzione d'onda descrivente il sistema in una componente assiale generica che moltiplica una parte radiale di forma gaussiana, caratterizzata da una larghezza  $\sigma$  funzione della variabile assiale e del tempo; sostituendo l'*Ansatz* all'interno dell'azione del sistema ed effettuando un'integrazione sulle coor-

---

dinate radiali si ottengono tramite deduzione variazionale due equazioni accoppiate per la funzione d'onda assiale e per la larghezza della gaussiana. In una appropriata approssimazione,  $\sigma$  è descritta da un'equazione algebrica (ovverosia non differenziale) e la sua espressione può dunque essere sostituita all'interno della prima; si ottiene così un'equazione effettiva unidimensionale, funzione solo della variabile assiale, che permette di tenere conto anche della dinamica trasversa.

Gli autori hanno mostrato che l'equazione trovata dà risultati molto più accurati di tutti gli altri modelli unidimensionali finora introdotti nella descrizione del profilo assiale di un condensato nello stato fondamentale di una trappola armonica. L'interesse ulteriore di questo modello è costituito dalla sua capacità di dare indicazioni sulla forma trasversa della funzione d'onda.

La forma originalmente proposta, ricavata per un potenziale stazionario, non permette tuttavia di descrivere in modo adeguato una espansione balistica del sistema: in tale caso infatti l'equazione per la larghezza trasversa non ammette soluzione.

In questo lavoro abbiamo dunque esteso il modello al caso di potenziali armonici dipendenti dal tempo, includendo nella derivazione dell'equazione una trasformazione unitaria [CD96, KSS96] che comporta un riscaldamento delle coordinate ed una trasformazione di gauge sulla funzione d'onda. L'introduzione della trasformazione permette di descrivere il sistema attraverso una funzione d'onda "ridotta", ambientata in un potenziale fittizio costante, coincidente con quello all'istante  $t = 0$ . Nel limite di Thomas-Fermi, ovvero quando è importante la natura interagente del condensato, ed in presenza di solo potenziale armonico (variabile nel tempo) la soluzione esatta del problema prevede che la funzione d'onda "ridotta" resti costante per tutta l'evoluzione.

La trasformazione è descritta da due parametri numerici di scala che soddisfano un sistema di due equazioni differenziali accoppiate, la cui risoluzione non presenta alcuna difficoltà.

Abbiamo confrontato il modello con il succitato esperimento realizzato al LENS, ovverosia abbiamo indagato lo stato fondamentale di un condensato in presenza di una trappola armonica contenente una componente periodica e l'espansione da esso effettuata allo spegnimento del potenziale. I risultati ottenuti, esposti nell'ultimo capitolo, mostrano che, al variare dei parametri caratteristici quali l'intensità delle interazioni reciproche e l'altezza del potenziale periodico, l'equazione trovata è in grado di descrivere in modo molto accurato il sistema, sia nella direzione assiale che in quella radiale.

Il lavoro è organizzato come segue: nei capp. 2 e 3 presentiamo una introduzione al fenomeno della condensazione di Bose-Einstein e alle tecniche sperimentali di intrappolamento, raffreddamento e manipolazione, mentre nel cap. 4 rivediamo le equazioni unidimensionali ad oggi presenti in letteratura; nel cap. 5, dopo aver introdotto la trasformazione di scala, proponiamo la deduzione *ab initio* del nuovo modello, discutendone le approssimazioni

effettuate; nel cap. 6 riportiamo le tecniche necessarie all'implementazione numerica dell'equazione ed infine, nel cap. 7, effettuiamo un'analisi completa della nuova equazione, comparando i risultati ottenuti con simulazioni numeriche effettuate sul modello completo tridimensionale ed ove possibile con i dati sperimentali raccolti al LENS e il modello introdotto dagli autori dell'articolo. I punti più tecnici del lavoro sono rimandati alle varie appendici.

## Capitolo 2

# Condensazione di Bose-Einstein

La distribuzione delle energie di un gas ad alta temperatura è ben descritta dalla distribuzione di Maxwell-Boltzmann ed è noto che deviazioni da questa non sono attese fintantoché le condizioni esterne permettono di considerare il sistema come “classico”. Quando tuttavia la lunghezza d’onda termica di de Broglie diventa comparabile con la distanza tra le particelle, una interpretazione classica del mondo fisico fallisce e solo la meccanica quantistica è in grado di spiegare i fenomeni alquanto particolari che avvengono.

Per un gas in equilibrio termico la lunghezza d’onda caratteristica è data da:

$$\lambda_{dB}(T) \equiv \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}}$$

e la distanza media tra le particelle è  $n^{-1/3}$  (dove  $n$  è la densità del gas): la “barriera” tra il mondo classico e il mondo quantistico è dunque attesa per  $n\lambda_{dB}^3 \sim 1$ , ovvero per una temperatura:

$$T \sim \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B} n^{2/3}.$$

In teoria quantistica le particelle possono essere divise in due grandi classi: i bosoni, a spin intero, e i fermioni, caratterizzati da spin semiintero. L’appartenenza a uno dei due gruppi comporta differenze notevolissime nel modo con cui questi oggetti interagiscono tra loro: nei postulati della meccanica quantistica si afferma infatti che un sistema di particelle identiche debba essere descritto da una funzione d’onda che, rispetto allo scambio di due di esse, sia simmetrica per i bosoni ed antisimmetrica per i fermioni.

Da questo postulato discendono due diverse statistiche che governano la distribuzione in energia delle particelle (e che si riducono a quella di Maxwell-Boltzmann per alta temperatura). I fermioni obbediscono alla statistica di

Fermi-Dirac, che impedisce a due di loro di occupare lo stesso stato quantistico. Al contrario la statistica di Bose-Einstein regola il comportamento dei bosoni e spinge queste particelle ad occupare lo stesso stato attraverso un processo chiamato stimolazione bosonica: la presenza di un bosone in uno stato aumenta la probabilità che un'altra particella occupi lo stesso stato.

La condensazione di Bose-Einstein è una transizione di fase termodinamica, introdotta da Shandrasekar Bose [Bos24] e Albert Einstein [Ein24], che avviene nei sistemi bosonici a temperatura molto bassa: al di sotto di una soglia critica, un numero macroscopico di particelle si trova ad occupare lo stesso stato, quello di minima energia; le onde di de Broglie associate a ciascuna particella stabiliscono l'una con l'altra una ben determinata relazione di fase e il sistema può allora essere descritto da un'unica funzione d'onda di dimensioni macroscopiche.

## 2.1 Gas ideale

In un sistema di bosoni, il numero di occupazione di uno stato nondegenera a energia  $\epsilon$  è dato dalla distribuzione di Bose-Einstein [Hua87]:

$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1}, \quad (2.1)$$

dove  $\beta \equiv 1/k_B T$  e il parametro  $\mu$ , detto potenziale chimico, è fissato dalla condizione di normalizzazione:

$$N = \sum_{\epsilon} f(\epsilon).$$

Affinchè le probabilità di occupazione di tutti gli stati siano definite positive, è necessario che il potenziale chimico sia sempre minore dell'energia dello stato fondamentale, ovvero negativo nel caso di un gas libero.

Per un gas non-interagente confinato in una scatola cubica di volume  $V = L^3$ , le condizioni al contorno comportano la quantizzazione dei momenti nella forma  $\mathbf{p} = 2\pi\hbar\mathbf{l}/L$ ; ogni stato è dunque individuato dalla tripletta di numeri interi  $\mathbf{l} \equiv l_x, l_y, l_z$ .

Nel limite termodinamico, le somme sugli stati che compaiono nelle medie statistiche possono essere convertite in integrali su un continuo di stati tramite la formula:

$$\sum_{\mathbf{l}} \longrightarrow \frac{V}{h^3} \int d^3\mathbf{p};$$

questa approssimazione è valida nel cosiddetto limite semiclassico, nel quale le energie coinvolte nella somma (dell'ordine di  $k_B T$ ) sono molto più grandi della separazione in energia tra i singoli stati.

La densità degli stati  $\rho(\epsilon)$  di un gas libero, con energia  $\epsilon = \mathbf{p}^2/2m$ , può essere calcolata a partire dalla normalizzazione dello spazio delle fasi:

$$1 = \frac{1}{\hbar^3} \iint d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{p} \equiv \int_0^\infty d\epsilon \rho(\epsilon),$$

ottenendo:

$$\rho(\epsilon) = \frac{1}{(2\pi)^2} \sqrt{(2m)^3} \frac{V}{\hbar^3} \sqrt{\epsilon}.$$

La densità degli stati si rivela molto utile per ricavare le grandezze termodinamiche; ad esempio, utilizzando il numero di occupazione  $f(\epsilon)$  (2.1), potremmo calcolare il numero di particelle che compongono il sistema:

$$N = \frac{1}{\hbar^3} \iint d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{p} f(\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})) = \int_0^\infty d\epsilon f(\epsilon)\rho(\epsilon).$$

Questa formula ben descrive un sistema ad alta temperatura, per il quale la densità degli stati è piccata su un valore  $\bar{\epsilon}$  molto grande. Un condensato di Bose è invece caratterizzato da  $\bar{\epsilon} \sim 0$ , valore per il quale si annulla la densità degli stati: la normalizzazione sopra riportata richiederebbe allora valori positivi per il potenziale chimico.

Per calcolare correttamente il numero di particelle al di sotto della soglia di condensazione è invece necessario aggiungere “a mano” il contributo  $N_0$  portato dallo stato fondamentale:

$$\begin{aligned} N &= N_0 + \frac{1}{\hbar^3} \iint d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{p} f(\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{p})) = N_0 + \int_0^\infty d\epsilon f(\epsilon)\rho(\epsilon) = \\ &= N_0 + \frac{V}{\lambda_{dB}^3(T)} g_{3/2}(e^{\beta\mu}). \end{aligned}$$

dove per risolvere l'integrale è stata introdotta la funzione di Bose:

$$g_\eta(z) \equiv \sum_{t=1}^{\infty} \frac{z^t}{t^\eta} = \frac{zr^\eta}{\Gamma(\eta)} \int_0^\infty \frac{x^{\eta-1} dx}{e^{rx} - z}.$$

$N_0$  serve dunque ad assicurare che, anche a temperature inferiori alla temperatura critica, il potenziale chimico non raggiunga valori positivi; la temperatura critica di condensazione può essere calcolata dall'espressione sopra data nei limiti  $N_0 \rightarrow 0$  e  $\mu \rightarrow 0$ :

$$n\lambda_{dB}^3(T_c) = g_{3/2}(1) = 2.612, \quad (2.2)$$

Per  $T < T_c$ , ovvero per  $n\lambda(T) > 2.612$ , lo stato fondamentale è quindi popolato da un numero macroscopico di atomi  $N_0$  e il potenziale chimico è fissato a  $\mu = 0$ ; il numero delle particelle che occupano stati eccitati è:

$$N_{term} = \frac{V}{\lambda_{dB}^3(T)} g_{3/2}(1) = N \left( \frac{T}{T_c} \right)^{3/2}$$

e dunque, poiché  $N = N_0 + N_{term}$ , la frazione di atomi nello stato fondamentale è data dalla famosa formula:

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^{3/2}.$$

Notiamo infine che la condensazione in un gas ideale libero rende macroscopicamente popolato lo stato caratterizzato da  $\mathbf{p} = 0$ , completamente disperso nel volume della “scatola”: il fenomeno è dunque limitato allo spazio degli impulsi e non risulta direttamente visibile nello spazio delle coordinate.

Tutta la trattazione sopra esposta può essere ora effettuata per un gas confinato in un potenziale armonico anisotropo tridimensionale:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2),$$

all'interno del quale i livelli energetici sono dati da:

$$\epsilon_l = \sum_{i=x,y,z} \left( l_i + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_i;$$

in questo caso il limite superiore per il potenziale chimico è:

$$\mu_c = \frac{\hbar}{2} (\omega_x + \omega_y + \omega_z)$$

e la densità degli stati si scrive [DGPS99]:

$$\rho(\epsilon) = \frac{1}{2} \frac{\epsilon^2}{(\hbar \bar{\omega})^3}$$

(dove  $\bar{\omega} \equiv \sqrt[3]{\omega_x \omega_y \omega_z}$  è la media geometrica delle frequenze).

Ricordiamo qui che, per sistemi intrappolati in potenziali armonici, il limite termodinamico usualmente utilizzato,  $N \rightarrow \infty$  e  $V \rightarrow \infty$  a densità costante, va sostituito dal più appropriato  $N \rightarrow \infty$  e  $\bar{\omega} \rightarrow 0$  con  $N \bar{\omega}^3$  fissato.

La condizione di normalizzazione porta allora all'espressione:

$$N = N_0 + \left( \frac{k_B T}{\hbar \bar{\omega}} \right)^3 g_3 \left( e^{\beta \mu} \right).$$

Per la temperatura critica si ottiene la relazione:

$$k_B T_c = 0.94 (\hbar \bar{\omega}) N^{1/3} \quad (2.3)$$

e la formula che esprime la frazione condensata è in questo caso data da:

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^3.$$



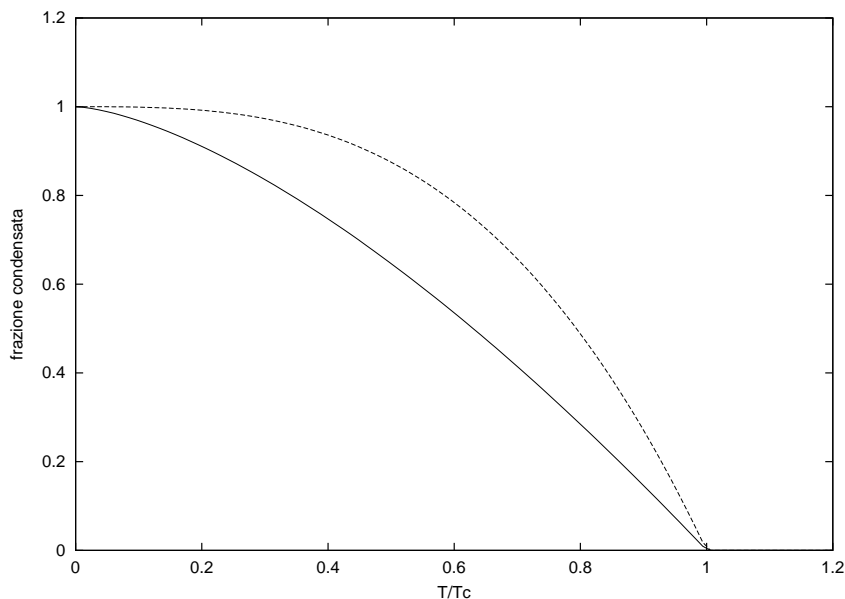


Figura 2.1: Frazione condensata per un gas non interagente, rispettivamente nello spazio libero (linea continua) e intrappolato in un potenziale armonico (linea tratteggiata).

Come si può notare, le proprietà termodinamiche di un condensato immerso in un potenziale armonico dipendono dalle frequenze di trappola solo attraverso la separazione media dei livelli  $\hbar\bar{\omega}$ . Possiamo inoltre verificare a posteriori la validità dell'approssimazione semiclassica sopra effettuata: in un tipico esperimento il numero di atomi coinvolti varia tra qualche migliaio ed alcuni milioni e dunque l'eq. (2.3) implica  $k_B T_c \gg \hbar\bar{\omega}$ .

L'utilizzo di trappole armoniche anisotrope permette di rendere visibile il fenomeno della condensazione di Bose-Einstein anche nello spazio delle coordinate. La funzione d'onda di un gas ideale in un potenziale armonico è data infatti da:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \left( \frac{1}{\sqrt{\pi} a_{\bar{\omega}}} \right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2\hbar}(\omega_x x^2 + \omega_y y^2 + \omega_z z^2)}$$

dove  $a_{\bar{\omega}}$  è detta lunghezza caratteristica del potenziale e corrisponde alla media geometrica delle larghezze delle gaussiane nelle tre direzioni:

$$a_{\bar{\omega}} \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{m\bar{\omega}}}.$$

Se la trappola è “a forma di sigaro” (ovvero con  $\omega_x = \omega_y = \omega_{\perp} \gg \omega_z$ ), per il condensato si ha  $\Delta Z \gg \Delta R_{\perp}$ ; poichè lo stato fondamentale è ben noto

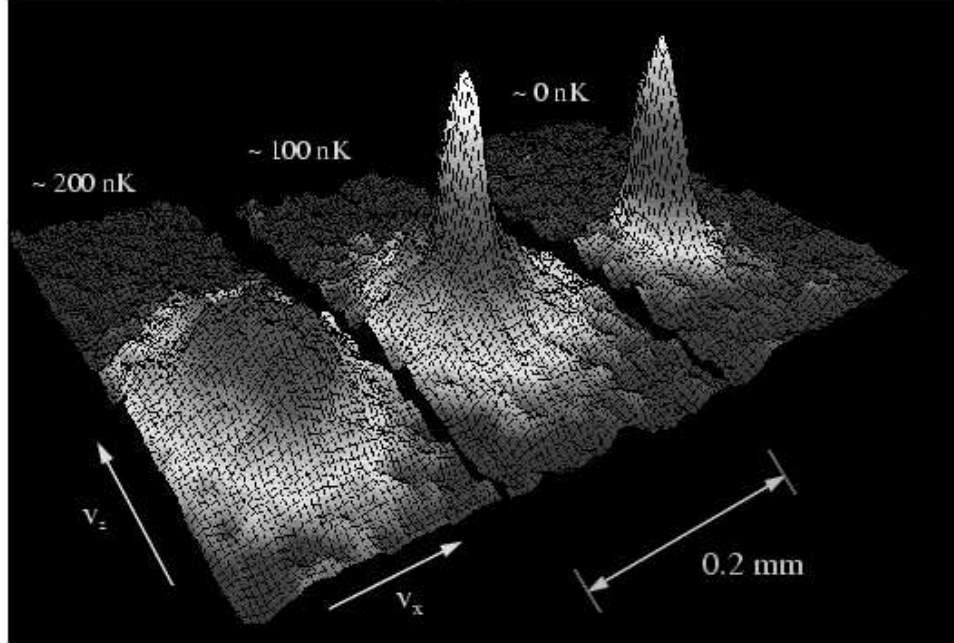


Figura 2.2: Immagini della distribuzione di velocità di atomi di rubidio raccolte a seguito di un'espansione libera: nella figura di sinistra la temperatura è al di sopra della soglia critica, in centro appena al di sotto e nell'immagine di destra molto al di sotto. Si può notare la progressiva scomparsa della nuvola termica gaussiana e l'apparizione improvvisa del picco centrale, identificabile con la frazione condensata; il campo visuale è di  $200 \times 270 \mu\text{m}$ , indicando la natura realmente macroscopica del fenomeno. La figura è tratta dal primo esperimento di condensazione di gas di bosoni debolmente interagenti, eseguito al JILA nel 1995 [AEM95].

essere a minima indeterminazione, il principio di Heisenberg prevede per esso  $\Delta P_z \ll \Delta P_\perp$ . Se in queste condizioni si spegne il potenziale confinante, la nuvola condensata effettuerà un'espansione molto più pronunciata nella direzione radiale rispetto a quella assiale: si avrà dunque un passaggio graduale del condensato da una forma a sigaro ad una a disco. Le particelle componenti la frazione non condensata sono invece distribuite termicamente su diversi autostati ad energia superiore che, in accordo con il principio di equipartizione, sono isotropicamente dispersi nello spazio dei momenti: allo spegnimento della trappola esse dunque espanderanno in una nuvola a simmetria sferica.

Bellissime immagini sperimentali di espansione (cfr. fig. 2.2) mostrano il fenomeno suddetto: scendendo con la temperatura al di sotto della soglia critica, si nota la sparizione della nuvola termica sferica e la forma-

zione dello stretto picco anisotropo centrale, segnatura inequivocabile della condensazione di Bose-Einstein.

Poichè la frazione condensata  $N_0/N$  è zero oltre la transizione e diversa da zero al di sotto, essa può essere scelta come parametro d'ordine del sistema. Sia nel caso omogeneo che in presenza di una trappola armonica la funzione  $N_0(T)$  è continua al punto critico, con derivata discontinua: in ambedue i casi dunque la condensazione di Bose-Einstein è una transizione termodinamica del second'ordine (o fenomeno critico); essa può allora essere analizzata attraverso una teoria di campo medio, approccio che si è dimostrato molto efficace nello studio di altri fenomeni critici quali la magnetizzazione o l'allineamento spontaneo dei cristalli liquidi [BFDN92].

## 2.2 Gas di bosoni debolmente interagenti

L'Hamiltoniana a molti corpi per un sistema di bosoni interagenti e confinati in un potenziale esterno  $V_{ext}$  si scrive, in seconda quantizzazione, come:

$$H(t) = \int d^3\mathbf{r} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}, t) \right] \hat{\Psi}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') V_{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \quad (2.4)$$

dove  $\hat{\Psi}$  e  $\hat{\Psi}^\dagger$  sono il distruttore e il creatore del campo bosonico, soddisfacenti alle regole di commutazione  $[\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}', t)] = i\hbar\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ , e  $V_{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  è il potenziale interatomico a due corpi.

In un gas molto diluito e freddo si può supporre che le uniche interazioni possibili siano quelle a bassa energia, “in onda  $s$ ”, che non permettono distanze relative tra le varie particelle troppo piccole e sono dunque indipendenti dalle caratteristiche a corto *range* del potenziale a due corpi. Tali collisioni sono elastiche ed isotrope, descritte da un solo parametro  $a_s$ , detto lunghezza di *scattering*. In questo caso si può effettuare la sostituzione  $V_{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \equiv g\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ , dove  $g$  è dato da:

$$g \equiv \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m}. \quad (2.5)$$

La bontà dell'approssimazione sopra effettuata è controllata da un parametro adimensionale, il numero di particelle in un “volume di *scattering*”  $|a_s|^3$ ; i gas alcalini normalmente usati negli esperimenti hanno lunghezze di *scattering* dell'ordine del nanometro ( $a_s = 5.77$  nm per  $^{87}\text{Rb}$ ,  $a_s = 2.75$  nm per  $^{23}\text{Na}$ ,  $a_s = -1.45$  nm per  $^7\text{Li}$ ) e densità comprese tra  $10^{13}$  e  $10^{15}$   $\text{cm}^3$ , così che il prodotto  $n|a_s|^3$  risulta sempre inferiore a  $10^{-3}$ .

Se verifica la condizione  $n|a_s|^3 \ll 1$ , un sistema è detto “debolmente interagente” o “diluito”: quest'approssimazione permette all'approccio di campo

medio, che verrà tracciato in seguito, di descrivere in modo molto accurato gli esperimenti realizzati negli ultimi anni sui gas alcalini.

Per un sistema di bosoni “debolmente interagenti” l’Hamiltoniana 2.4 può dunque essere scritta nella forma:

$$H(t) = \int d^3\mathbf{r} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}, t) + \frac{g}{2} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \right] \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \quad (2.6)$$

L’analisi dei fenomeni critici passa attraverso la definizione di un parametro d’ordine, ovvero una funzione che assume valori diversi da zero solo al di là della soglia di transizione; seguendo uno schema tracciato da Bogoliubov [Bog47], si introduce per l’operatore  $\hat{\Psi}$  la scomposizione:

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \Psi(\mathbf{r}, t) + \hat{\Psi}'(\mathbf{r}, t) \quad (2.7)$$

dove  $\Psi$  è una funzione complessa definita come il valor medio dell’operatore di campo  $\hat{\Psi}$ :  $\Psi(\mathbf{r}, t) \equiv \langle \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \rangle$ ; poichè l’Hamiltoniana possiede simmetria U(1) (invarianza per una arbitraria fase locale del campo), il valor medio dell’operatore di campo dovrebbe essere zero: la presenza di valori non nulli per  $\Psi$  comporta una rottura di simmetria (ovvero un allineamento spontaneo delle fasi del campo) ed è la segnatura fondamentale della condensazione di Bose-Einstein.

$\Psi(\mathbf{r}, t)$  è un campo classico dotato di una fase ben determinata, il cui modulo quadro fissa la densità della parte condensata:  $n_0(\mathbf{r}, t) = |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$ ; esso è detto “funzione d’onda del condensato” e caratterizza il comportamento a lungo *range* della matrice densità a una particella  $\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) \equiv \langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}_1, t) \hat{\Psi}(\mathbf{r}_2, t) \rangle$  attraverso la relazione asintotica [GL50, PO56]:

$$\lim_{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \rightarrow \infty} \rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \Psi^*(\mathbf{r}_1, t) \Psi(\mathbf{r}_2, t).$$

In un sistema confinato, per sua natura quindi limitato nello spazio, i concetti di limite termodinamico (all’interno del quale si ha rottura di simmetria) e di ordine a lungo *range* vanno considerati con cautela; la funzione d’onda del condensato può tuttavia essere identificata con l’autostato della matrice di densità ad una particella  $\rho$  caratterizzato dall’autovalore massimo:

$$\int d\mathbf{r}' \Psi_i(\mathbf{r}', t) \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = N_i \Psi_i(\mathbf{r}, t) \implies \Psi = \Psi_k \text{ t. c. } N_k = \max\{N_i\}.$$

Quando la frazione termica, descritta da  $\hat{\Psi}'(\mathbf{r}, t) \equiv \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) - \langle \hat{\Psi} \rangle$ , è trascurabile, uno sviluppo all’ordine 0 di  $\hat{\Psi}$  porta ad un’equazione chiusa per il parametro d’ordine  $\Psi$ . Applicando l’equazione di Heisenberg all’Hamiltoniana a molti corpi, scritta in approssimazione di sistema “debolmente interagente” (eq. 2.6), si ottiene l’espressione operatoriale:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) &= [\hat{\Psi}, H(t)] = \\ &= \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}, t) + g \hat{\Psi}(\mathbf{r})^\dagger \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \right] \hat{\Psi}(\mathbf{r}); \end{aligned}$$

effettuando ora la sostituzione  $\hat{\Psi} \rightarrow \Psi$  si ottiene:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}, t) + g|\Psi(\mathbf{r})|^2 \right] \Psi(\mathbf{r}) \quad (2.8)$$

con la normalizzazione  $\int d\mathbf{r} |\Psi|^2 = N_0 = N$ .

Se imponiamo ora la più consueta normalizzazione a 1, la nuova equazione si ha con la semplice sostituzione  $g \rightarrow g(N-1) \approx gN$ :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}, t) + gN|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (2.9)$$

Questa è la famosa equazione di Gross-Pitaevskii (GPE) [Gro61, Pit61] per la funzione d'onda del condensato, descrivente un sistema di bosoni debolmente interagenti: data l'ipotesi  $\hat{\Psi}' = 0$ , l'equazione qui trovata è strettamente valida solo nel limite di completa condensazione, ovvero di temperatura nulla. Nella maggioranza degli esperimenti tuttavia questa condizione è ben verificata: la nuvola termica è in generale indistinguibile nelle immagini di condensati espansi, indicando che la frazione condensata è molto vicina all'unità (vedi figg. 2.2 e 7.10). Come mostrato in [DGPS99] le correzioni al prim'ordine alla teoria di campo medio, ottenute considerando il parziale svuotamento del condensato causato dalle interazioni reciproche tra le particelle, sono proporzionali al valore del parametro  $n(\mathbf{r})a_s^3$  valutato nel centro della trappola e ammontano a meno dell'1% nelle più comuni condizioni sperimentali.

L'energia associata al sistema è data dal funzionale:

$$E[\Psi](t) = \int d^3\mathbf{r} \left[ \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla\Psi|^2 + V(\mathbf{r}, t)|\Psi|^2 + \frac{gN}{2} |\Psi|^4 \right],$$

all'interno del quale si distinguono i contributi derivanti rispettivamente dall'energia cinetica, potenziale e di interazione.

L'importanza dell'interazione può ben essere evidenziata dall'utilizzo di variabili riscalate: in una trappola armonica sferica, scegliendo come unità di lunghezza, tempo ed energia rispettivamente  $a_{\bar{\omega}}$ ,  $\bar{\omega}^{-1}$  e  $\hbar\bar{\omega}$ , l'equazione di Gross-Pitaevskii si riduce a:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \left[ -\frac{1}{2} \nabla^2 + \frac{1}{2} r^2 + 4\pi \frac{Na_s}{a_{\bar{\omega}}} |\Psi(\mathbf{r})|^2 \right] \Psi(\mathbf{r}).$$

Nello stato fondamentale, ambedue le energie cinetiche e potenziali sono dell'ordine dell'unità, mentre quella di interazione è proporzionale al fattore adimensionale  $Na_s/a_{\bar{\omega}}$ . Nel limite di auto-interazione molto debole,  $N|a_s|/a_{\bar{\omega}} \ll 1$ , questa energia è trascurabile rispetto alle altre quantità in gioco e ci si attende per lo stato fondamentale una forma simile ad una gaussiana, corrispondente a quella di un sistema di bosoni ideali. Nel limite

opposto  $N|a_s|/a_{\bar{\omega}} \gg 1$  invece ci si aspetta che le interazioni modifichino in modo sostanziale la forma dello stato fondamentale.

Per forze attrattive, ovvero per  $a_s < 0$ , il termine di interazione che compare nell'espressione dell'energia ha segno negativo: questo comporta che l'energia del sistema decresca all'aumentare della densità e rende dunque instabile il condensato nello spazio libero, facendolo collassare in un punto. Se il sistema è confinato in un potenziale e il numero di particelle non è troppo grande, l'energia cinetica di punto zero (detta anche pressione quantistica) può predominare sull'energia di interazione e stabilizzare il condensato. La nuvola tende dunque a concentrarsi nel centro della trappola, collocandosi su uno stato metastabile caratterizzato da una larghezza inferiore a quella dello stato non interagente. Quando tuttavia la densità assume valori troppo elevati, il minimo locale scompare e lo stato metastabile non può più esistere: la pressione quantistica non è sufficiente a moderare il moto del gas e questo collassa su sé stesso, uscendo dalla trappola attraverso processi inelastici. Dato il tipo di trappola e di atomi, esiste il numero critico  $N_{cr}$  al di sopra del quale avviene l'implosione è in genere dell'ordine di  $a_{\bar{\omega}}/|a_s|$ .

Per atomi con forza di autointerazione repulsiva, caratterizzati da  $a_s > 0$ , l'energia dello stato fondamentale decresce al diminuire della densità e dunque il condensato tende ad espandersi, contrastato in questo caso dal carattere confinante del potenziale. All'aumentare del parametro  $Na_s/a_{\bar{\omega}}$  si ha un graduale appiattimento ed allargamento del profilo di densità ed una conseguente diminuzione del termine cinetico, che dipende dalla derivata seconda della curva: esso diventa sempre meno importante rispetto al termine di autointerazione e varia in modo significativo solo vicino alla superficie del condensato.

Nell'ipotesi in cui il termine di interazione sia preponderante rispetto a quello cinetico, si può ottenere una soluzione analitica per la densità dello stato fondamentale. Partendo dalla GPE stazionaria:

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r}) + gN|\Psi|^2 \right) \Psi = \mu\Psi$$

ed effettuando la cosiddetta approssimazione di Thomas-Fermi (TF), che consiste nel tralasciare completamente il termine cinetico di pressione quantistica, si ottiene:

$$|\Psi_{TF}(\mathbf{r})|^2 = \begin{cases} \frac{\mu_{TF} - V(\mathbf{r})}{gN} & \text{se } \mu_{TF} - V(\mathbf{r}) > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.10)$$

Il valore del potenziale chimico, che corrisponde all'energia dello stato fondamentale, si ricava imponendo la normalizzazione della densità<sup>1</sup>:

$$\int d^3\mathbf{r} |\Psi_{TF}|^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \mu_{TF} = \frac{\hbar\bar{\omega}}{2} \left( \frac{15Na_s}{a_{\bar{\omega}}} \right)^{2/5}$$

<sup>1</sup>Per il calcolo si può vedere il par. 4.2.

La soluzione di Thomas-Fermi può essere applicata dunque nell'ipotesi di forte autointerazione,  $Na_s/a_{\bar{\omega}} \gg 1$ : già per valori di questo parametro dell'ordine di 100, un grafico della densità di TF è quasi indistinguibile dalla soluzione esatta calcolata con la GPE 3D e si discosta da essa solo sulla superficie del condensato, dove l'energia cinetica non è più trascurabile (cfr. fig. 7.3). Il profilo di TF ha la forma di un paraboloide rovesciato che si annulla sulla superficie costituita dai punti  $\mathbf{P}$  che soddisfano all'uguaglianza  $V(\mathbf{P}) = \mu$ . In questa approssimazione dunque il potenziale chimico fissa univocamente le estensioni assiali e radiali di un condensato in una trappola armonica:

$$R_z^{TF} = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_z^2}} \quad \text{e} \quad R_{\perp}^{TF} = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_{\perp}^2}}$$

Nel prossimo capitolo effettueremo una rapida panoramica sulle possibilità sperimentali di manipolazione dei condensati, introducendo le trappole armoniche ed i potenziali periodici ottici.





## Capitolo 3

# Potenziali ottici e magnetici

I condensati di Bose-Einstein possiedono proprietà peculiarmente quantistiche, quali la popolazione macroscopica di un singolo stato o la coerenza a lungo range, che li rendono strumenti importantissimi per la ricerca nel campo dell'ottica quantistica e per la verifica dei postulati fondamentali della meccanica quantistica. Il vasto interesse suscitato dalla loro scoperta nasce soprattutto dalla alta precisione e dalla relativa facilità con cui questo stato della materia può essere preparato e manipolato.

Nel presente capitolo, dopo una breve introduzione alle forze utilizzate per agire sugli atomi, verranno introdotti i metodi di intrappolamento e di raffreddamento necessari per la creazione di condensati di gas debolmente interagenti; nell'ultima sezione verranno introdotti i reticoli ottici, con una descrizione delle loro proprietà e delle applicazioni possibili.

### 3.1 Interazione radiazione-materia

Per analizzare i vari fenomeni che compongono il vasto campo dell'interazione radiazione-materia è utile suddividere i processi possibili in due grandi categorie: quelli di tipo dissipativo, che comportano assorbimento ed emissione di fotoni, e quelli di tipo dispersivo, che modificano le proprietà del sistema senza coinvolgere scambio di particelle.

Tale divisione è ben nota nel caso del passaggio di un fascio luminoso attraverso un corpo materiale: il comportamento della radiazione è descritto dal suo indice di rifrazione, la cui parte immaginaria ci dà informazioni sull'assorbimento (ovvero sui processi dissipativi) mentre la parte reale tiene conto della variazione di velocità subita dal fascio stesso (fenomeno di tipo dispersivo). La parte immaginaria di  $n$  varia con il detuning  $\delta \equiv \omega_l - \omega_a$  (dove  $\omega_l$  e  $\omega_a$  sono rispettivamente la frequenza del fascio entrante e quella di risonanza degli atomi) come una curva di assorbimento Lorentziana; la parte reale di  $n - 1$  varia invece con  $\delta$  come una curva di dispersione Lorentziana.

L'ottica quantistica prevede che gli effetti di assorbimento e di dispersione

siano presenti anche negli stati atomici: l'allargamento delle righe spettrali, che determina la vita media degli stati e coinvolge dunque emissione ed assorbimento di fotoni, è infatti interpretabile come un effetto dissipativo; lo spostamento dei livelli atomici (chiamato "*Lamb shift*" nel caso di interazione con il campo di vuoto o "*ac Stark shift*" quando l'atomo è illuminato da un fascio nonrisonante) è un effetto prettamente dispersivo.

La teoria di Jaynes-Cummings e l'utilizzo dei cosiddetti *dressed states* permettono una semplice derivazione delle quantità in gioco ed una descrizione abbastanza completa di questi fenomeni [QO]. I *dressed states* sono gli autostati dell'Hamiltoniana di un sistema composto da un atomo a due livelli interagente con un campo a singolo modo e possono essere scritti come:

$$|-, N \rangle = \sin \theta |e, N \rangle + \cos \theta |f, N + 1 \rangle$$

$$|+, N \rangle = \cos \theta |e, N \rangle - \sin \theta |f, N + 1 \rangle,$$

dove i *naked states*  $|f, N + 1 \rangle$  e  $|e, N \rangle$  descrivono rispettivamente un atomo a due livelli nello stato fondamentale [eccitato] ed un campo monomodo, composto da  $N + 1$  [N] fotoni e considerato inizialmente non interagente con l'atomo (sono quindi il prodotto tensoriale degli autostati delle due Hamiltoniane libere).

Un'evoluzione disaccoppiata del sistema luce-atomo prevederebbe per i due autostati imperturbati una separazione in energia pari a  $\hbar\delta$ ; l'Hamiltoniana di interazione  $V_{al}$  permette il trasferimento di un fotone da uno stato all'altro e dunque possiede elementi fuori diagonale, pari a  $\hbar\Omega/2$ <sup>1</sup>. L'effetto di questo accoppiamento porta i due livelli a repellersi l'un l'altro, portandoli ad acquisire uno shift supplementare pari a  $\hbar\Delta'$  (effetto Stark o light shift); inoltre l'accoppiamento tra il livello eccitato (che possiede una larghezza naturale di riga  $\Gamma$ , inversamente proporzionale alla sua vita media) e il livello fondamentale (che in assenza di campo elettromagnetico sarebbe stabile ed avrebbe quindi larghezza nulla) genera in quest'ultimo una larghezza  $\Gamma'$  (detta *scattering rate*, in quanto è proporzionale alla probabilità che un fotone incidente venga assorbito dall'atomo).

Nel limite di bassa intensità ( $\Omega \ll |\delta|$  e  $\Gamma$ ), dove l'interazione è trattabile in modo perturbativo, una prima approssimazione porta a considerare come autostati del sistema i *naked states* e permette di trovare le seguenti relazioni:

$$\Gamma' = \Omega^2 \frac{\Gamma}{\Gamma^2 + 4\delta^2}$$

$$\Delta' = \Omega^2 \frac{\delta}{\Gamma^2 + 4\delta^2}$$

---

<sup>1</sup> $\Omega \equiv 2\sqrt{\hbar\omega\sqrt{N+1}/2\epsilon_0\hbar^2L^3} \hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{d}$  è detta frequenza di Rabi del sistema e risulta proporzionale alla radice quadrata dell'intensità luminosa e al momento di dipolo di transizione tra i due stati atomici ( $\mathbf{d} \equiv \langle e|\mathbf{X}|f \rangle$ ).

Lo *scattering rate* e l'effetto Stark sono ambedue proporzionali a  $\Omega^2$ , ovvero all'intensità della luce, e variano con il detuning  $\delta$  rispettivamente come una Lorentziana di assorbimento e dispersione; se il sistema è vicino alla risonanza ( $|\delta| \ll \Gamma$ ) prevalgono gli effetti di assorbimento, mentre per grandi valori del detuning solo gli effetti dispersivi sono importanti.

Nel caso opposto di alta intensità gli autostati del sistema sono le combinazioni simmetrica ed antisimmetrica dei due *naked states*, sono separati in energia di una quantità pari a  $\hbar\Omega$  e ciascuno possiede una larghezza di riga pari a  $\Gamma' = \Gamma/2$ .

### 3.2 Manipolazione dei gradi di libertà atomici

Per ciascun atomo, si possono individuare due classi di gradi di libertà: quelli interni, che riguardano la configurazione elettronica o lo stato di polarizzazione (quando si considera l'atomo nel sistema di riferimento del centro di massa), e quelli esterni, ovvero la posizione e il momento del suo centro di massa. La manipolazione dei gradi di libertà interni sfrutta la possibilità di scambiare momento angolare tra atomi e luce polarizzata circolarmente, mentre il comportamento del centro di massa è modificabile attraverso lo scambio di momento lineare; le due interazioni possono inoltre essere combinate in raffinati schemi di raffreddamento laser quali l'“effetto Siffo” o il “VSCPT” (Velocity Selective Coherent Population Trapping), che permettono di raggiungere temperature ben inferiori al limite Doppler.

Il pompaggio ottico, realizzato nel 1950 [Kas50], è stato il primo metodo in grado di utilizzare l'interazione elettromagnetica per modificare gradi di libertà atomici interni. Il meccanismo è basato sul fatto che alcune transizioni tra sottolivelli Zeeman dovute a luce polarizzata sono proibite dalle regole di selezione (ovvero i loro elementi di matrice sono nulli per la conservazione del momento angolare); sfruttando queste limitazioni si è in grado di forzare selettivamente alcuni livelli ad effettuare transizioni, lasciando inalterati gli altri. Se il pompaggio dura abbastanza a lungo si può giungere a condizionare fortemente le popolazioni degli stati di spin, polarizzando in questo modo il campione; poichè il processo comporta lo scambio di fotoni tra il fascio e gli atomi, questo risulta favorito in condizioni di risonanza ed è di tipo assorbitivo.

Applicazioni più recenti di manipolazioni ottiche a gradi di libertà interni riguardano ad esempio la realizzazione di accoppiatori d'uscita a radiofrequenza per la realizzazione di laser atomici [MAK97, BHE99]: utilizzando una radiazione di frequenza e intensità appropriata si è in grado di cambiare progressivamente lo spin degli atomi intrappolati verso livelli con  $m_z = 0$ , che non risentono dell'interazione magnetica e possono quindi uscire in modo continuo dalla trappola.

Se la luce utilizzata è invece molto fuori risonanza non avvengono scambi

di fotoni in quanto proibiti dalla conservazione dell'energia; l'effetto dell'interazione elettromagnetica si presenta tuttavia sotto forma di una modifica dello splitting relativo tra i vari livelli Zeeman, effetto tipicamente dispersivo.

Anche quando si considera l'interazione fra i gradi di libertà esterni e la luce incidente, il parametro di detuning gioca un ruolo determinante.

Si supponga ad esempio un fascio quasi risonante con vettore d'onda  $\mathbf{k}$  che incide sugli atomi: i fotoni vengono assorbiti proporzionalmente allo *scattering rate*  $\Gamma'$  per essere poi riemessi; se il processo di emissione avviene in maniera non coerente, questa risulta ugualmente probabile nelle varie direzioni e dunque viene ceduto in media ad ogni evento un momento pari a  $\hbar\mathbf{k}$ ; questo comporta una variazione di momento nel tempo, ovvero una forza (chiamata pressione di radiazione), pari a  $\hbar\mathbf{k}\Gamma'$ . Questa forza viene comunemente impiegata negli schemi di raffreddamento laser (ad. es. in quello Doppler) per rallentare fasci di atomi termici.

Le forze dispersive, dette anche forze di dipolo, sono invece causate da variazioni spaziali del light shift  $\Delta'$ . Se si utilizza un laser molto fuori risonanza per illuminare gli atomi,  $\Gamma'$  risulterà trascurabile ed essi permarranno nello stato fondamentale, poichè l'assorbimento di fotoni violerebbe in maniera consistente la conservazione dell'energia; l'energia del ground state non è tuttavia costante ma risulta dipendente dall'intensità del campo incidente attraverso  $\Delta'$ . Questa variazione spaziale è interpretabile come un'energia potenziale, data da:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\alpha|E(\mathbf{r})|^2 \quad (3.1)$$

(dove  $\alpha$  è la polarizzabilità atomica e  $|E|^2$  è l'intensità del campo elettrico) che genera una forza uguale ed opposta al suo gradiente, detta forza di dipolo:  $F = -\nabla[\hbar\Delta']$ .

Le forze di dipolo sono comunemente utilizzate in vari ambiti dell'ottica quantistica perchè permettono una manipolazione selettiva e molto precisa dei singoli stati atomici, senza modificarne le popolazioni e mantenendo tra essi precise relazioni di fase.

In particolare nel caso dei condensati di Bose-Einstein un'uso appropriato di queste forze ha reso possibile la costruzione degli equivalenti atomici di tutti gli strumenti ottici (lenti, specchi, *beamsplitters*), permettendo così splendidi esperimenti di ottica atomica coerente, quali l'interferenza e la diffrazione di condensati o il laser ad atomi.

A detunings negativi ( $\omega_l - \omega_a < 0$ ) corrispondono light shifts negativi: i massimi dell'intensità luminosa corrispondono dunque a punti attrattivi e così, ad esempio, il waist di un laser focalizzato e spostato verso il rosso può essere usato come lente convergente o addirittura come trappola. Un fascio laser molto intenso detunato verso il blu può al contrario essere usato come specchio o come *beamsplitter*.

### 3.3 Tecniche di intrappolamento e raffreddamento

Affinchè un gas di atomi possa condensare è necessario che questo sia intrappolato in una piccola regione dello spazio e sia raffreddato a temperature molto basse; svariate tecniche sono state proposte e realizzate per ottenere questi scopi, tutte basate sull'utilizzo di campi magnetici e/o ottici, statici o dinamici.

Qui di seguito riportiamo una breve rassegna delle possibili realizzazioni sperimentali <sup>2</sup>.

#### 3.3.1 Trappole magneto-ottiche

La MOT (Magneto-Optical Trap), realizzata originariamente da Raab *et al.* [RPC87], è attualmente la trappola atomica più usata: essa è costituita da un gradiente magnetico prodotto da un campo di quadrupolo al quale sono sovrapposte tre coppie di fasci laser contropropaganti che si incrociano ad angoli retti nel punto con campo magnetico nullo.

Il campo magnetico di quadrupolo è generato da una coppia di bobine in configurazione anti-Helmholtz e la configurazione finale presenta uno zero centrale e un gradiente di campo orientato in direzione radiale, il cui modulo lungo l'asse delle bobine è doppio rispetto a quello nelle direzioni trasverse (questo fatto discende direttamente dalla condizione  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ). I laser sono polarizzati circolarmente e leggermente fuori risonanza rispetto a una transizione atomica ( $\Delta \sim \Gamma$ ), con parametro di detuning negativo (la frequenza luminosa è leggermente inferiore a quella di transizione degli atomi per permettere un efficace raffreddamento laser).

Il confinamento magnetico degli atomi avviene attraverso l'interazione del campo magnetico con il momento magnetico atomico  $\boldsymbol{\mu} = \mu_B g_F \mathbf{F}$ , dove  $\mu_B$  è il magnetone di Bohr e  $g_F$  il fattore di Landè per lo spin totale  $F \equiv L + S + I$ , dove  $L$  è il momento angolare elettronico,  $S$  lo spin elettronico e  $I$  lo spin nucleare.

Se lo spin segue adiabaticamente il campo magnetico, quest'ultimo esercita sull'atomo una forza  $F = -\nabla U$ , dove il potenziale magnetico è dato da:

$$U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = -\mu_B g_F m_F B.$$

Così, a seconda del segno di  $m_F$ , l'atomo sarà attratto verso un minimo o un massimo del campo; poichè non è possibile creare campi magnetici statici che presentino massimi locali, solo gli atomi attratti verso minimi del campo (i *low field seekers*) possono essere intrappolati da campi magnetici statici.

Il campo combinato delle bobine e dei laser causa per gli atomi una probabilità di assorbimento di fotoni contropropaganti variabile nello spazio,

---

<sup>2</sup>Per esaurienti informazioni sulle tecniche sperimentali sono disponibili in letteratura vari articoli di rassegna, tra i quali citiamo [CBY01] e [KDS-K99].

il cui effetto complessivo è quello di una forza frenante, sempre diretta verso l'origine; per piccoli spostamenti e velocità la forza può essere linearizzata nella forma:

$$m\ddot{z} + \alpha\dot{z} + \kappa z = 0,$$

ovvero gli atomi descrivono all'interno della MOT un moto smorzato in un potenziale armonico.

Il carattere dissipativo della MOT la rende uno strumento estremamente versatile, in quanto permette contemporaneamente di intrappolare e raffreddare gli atomi. Tuttavia essa è in generale usata solo come primo stadio verso la condensazione, in quanto permette di confinare circa  $10^{10}$  atomi con una densità di  $n = 10^{11} \text{ cm}^{-3}$  e ad una temperatura di circa  $100 \text{ } \mu\text{K}$ : tali valori danno una densità nello spazio delle fasi pari a  $\rho = n\lambda_{dB}^3 < 10^{-6}$ , sei ordini di grandezza inferiore a quella necessaria per la transizione.

Il raffreddamento a temperature inferiori è impedito dalle perdite che avvengono nel centro della trappola: qui infatti l'assunzione che gli spin seguano adiabaticamente l'andamento del campo non può essere vera, in quanto come visto il campo presenta uno zero nel centro ed ha un modulo che cresce radialmente (ovvero presenta una cuspid nel centro). Un atomo con spin allineato con il campo che passi per il centro non può dunque seguire adiabaticamente il campo e, mancando nell'origine un asse di quantizzazione, esso è libero di reorientarsi verso stati Zeeman non intrappolati: tali transizioni sono dette *Majorana spin flip transitions*.

### 3.3.2 Trappole puramente ottiche

L'utilizzo di radiazione luminosa molto fuori risonanza come visto permette di agire sugli atomi con le forze di dipolo, il cui carattere repulsivo o attrattivo è determinato dal segno del parametro di detuning. La più semplice trappola di dipolo, realizzata da Chu *et al.* [CBA86], consiste nell'utilizzare un fascio laser "red-detuned" fortemente focalizzato che confina gli atomi nel punto di massima intensità. Configurazioni con due o tre fasci laser incrociati sono state proposte e realizzate e atomi intrappolati in fasci fuori risonanza incrociati sono stati raffreddati evaporativamente. Le trappole ottiche offrono un ottimo controllo (sia spaziale che temporale) dei parametri di confinamento e possono essere accese o spente in tempi molto brevi; non essendo sensibili allo stato Zeeman degli atomi, esse permettono inoltre di intrappolare contemporaneamente tutti i sottolivelli magnetici, compresi quelli *high field seeking*.

Mentre i tentativi di produrre condensati di Bose-Einstein direttamente in trappole puramente ottiche non sono ancora riusciti, il gruppo al MIT [S-KAC98] ha trasferito adiabaticamente un condensato di sodio nello stato  $|F = 1, m_F = -1\rangle$ , creato in una trappola magnetica, all'interno di una trappola ottica: questo fatto ha loro permesso in seguito di accoppiare, tramite radiazione risonante, il sottolivello  $m_F = -1$  con gli altri due,

caratterizzati da  $m_F = 0, +1$  (che sono *high field seeking*) e di indagare la formazione di domini di spin ed il *tunneling* fra i domini.

Molti gruppi sperimentali stanno cercando di realizzare la condensazione con trappole puramente ottiche e sembra possibile raggiungere tale obiettivo nel prossimo futuro.

### 3.3.3 Trappole puramente magnetiche

Per superare i problemi legati alle perdite dovute alle transizioni di Majorana sono stati sviluppati svariati schemi implementati su trappole puramente magnetiche, che permettono tempi vite medie per gli atomi dell'ordine di un minuto.

Nella *Time Orbiting Potential (TOP) trap* alla trappola quadrupolare viene sovrapposto un campo di *bias* rotante che sposta lo zero di campo dal centro della trappola: il campo aggiuntivo ruota sufficientemente veloce attorno alla trappola in modo che gli atomi ne sentano solo l'effetto medio, costituito dal cosiddetto "*death circle*".

Un approccio alternativo al problema è costituito dalle configurazioni "alla Ioffe-Pritchard", nelle quali l'ampiezza di campo nel minimo non è nulla e quindi non avvengono le transizioni di Majorana. Molto usata negli esperimenti è la *QUIC trap*, nella quale al campo di quadrupolo viene aggiunta un campo trasverso di *bias*, generato da un'altra bobina: al variare dell'intensità di corrente, il campo di *bias* prodotto sposta il minimo del potenziale dal centro e lo solleva fino ad un valore  $B_0 \neq 0$ . In particolare attorno al minimo il campo è con ottima approssimazione quadratico su una distanza di qualche millimetro, più che sufficiente per i normali esperimenti realizzati sui condensati (che ricordiamo hanno una estensione tipica compresa tra i 10 e i 100  $\mu\text{m}$ ).

Poichè tuttavia la profondità del potenziale generato dalle trappole puramente magnetiche è molto limitata, esse possono essere utilizzate solo come secondo stadio verso la condensazione: negli schemi sperimentali al loro utilizzo si fa precedere in genere un primo raffreddamento degli atomi per mezzo di una o addirittura due MOT.

### 3.3.4 Raffreddamento evaporativo

L'interazione magnetica è conservativa e dunque le configurazioni puramente magnetiche possono essere usate solo per confinare gli atomi, non per raffreddarli; l'utilizzo di tecniche di *laser cooling* permette tuttavia di raggiungere solo temperature dell'ordine del milliKelvin, tre ordini di grandezza superiori a quelle necessarie per la transizione di Bose-Einstein.

Un nuovo meccanismo dissipativo per raffreddare atomi confinati, chiamato raffreddamento evaporativo, fu proposto originariamente da Hess per l'idrogeno spin-polarizzato ed è ora largamente usato negli esperimenti di

condensazione. In generale la temperatura di un sistema con energia di legame finita si abbassa quando dal corpo si allontanano (evaporano) le particelle più energetiche; esse portano via con loro una quantità di energia superiore a quella media del sistema e le collisioni elastiche che seguono, effettuate dalle particelle rimaste nel sistema, portano ad una ritermalizzazione verso una temperatura di equilibrio più bassa.

La migliore tecnica di evaporazione finora realizzata è basata sull'accoppiamento tramite radiofrequenza di livelli intrappolati e liberi [DMJ95]. Il metodo sfrutta il fatto che all'interno della trappola lo *splitting* tra i sottolivelli Zeeman dipende dalla posizione e quindi solo gli atomi con una ben definita distanza dall'origine possono essere in risonanza con la radiazione incidente: si origina così una "superficie evaporativa" tridimensionale, attraverso la quale gli atomi possono effettuare transizioni verso stati non confinati. La tecnica è molto vantaggiosa in quanto permette di lasciare inalterato il potenziale magnetico ed offre un controllo molto preciso sulla temperatura finale degli atomi.

### 3.4 Reticoli ottici

Un'onda stazionaria, generabile attraverso la retroriflessione di un laser, permette di ottenere un campo la cui intensità varia sinusoidalmente nello spazio, esteso su una lunghezza di centinaia di periodi e la cui altezza può essere regolata con grande facilità.

Come visto nel par. 3.2, un atomo molto fuori risonanza rispetto ad una radiazione incidente è sottoposto ad una forza di dipolo, il cui potenziale è proporzionale all'intensità del campo elettrico (cfr. eq. 3.1). Un condensato immerso in un'onda stazionaria risente quindi di un potenziale periodico, stabile ed esente da imperfezioni, descritto da:

$$V_{ret}(z) = sE_r \cos^2\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right) = \frac{sE_r}{2} \cos\left(\frac{2\pi z}{d}\right) + \text{cost.} \quad (3.2)$$

dove  $E_r$  è l'energia di rinculo di un atomo che ha assorbito un fotone del reticolo ( $E_r \equiv h^2/2m\lambda^2$ ),  $s$  un parametro adimensionale e  $d \equiv \lambda/2$  la distanza fra 2 buche adiacenti.

La natura contemporaneamente quantistica e macroscopica dei condensati di Bose-Einstein li rende strumenti ideali per la verifica di alcuni dei fondamenti della meccanica quantistica e dei fenomeni apparentemente paradossali che essa prevede, quali la natura ondulatoria e delocalizzata della materia o la superfluidità.

Dopo le prime misure di interferenza atomica realizzate al MIT [ATM97] su due condensati in espansione, l'analisi delle proprietà di coerenza della materia e le possibilità aperte dall'ottica atomica coerente sono diventate aree molto battute della ricerca di frontiera.



L'utilizzo di reticoli ottici ha permesso negli ultimi anni di sfruttare la versatilità e la coerenza dei condensati per il raggiungimento di numerosi traguardi scientifici, quali la realizzazione di un laser atomico impulsato [AK98], dell'effetto Josephson [CBF01] o lo studio della condensazione in dimensionalità ridotta (2D in [BCF01], 1D in [GBM01]). Recentissimi esperimenti hanno inoltre dimostrato la possibilità di realizzare nei condensati oscillazioni di Bloch collettive [MMC01] o la transizione da uno stato superfluido ad uno stato isolante di Mott [GME02].

I reticoli creati da laser a  $CO_2$ , caratterizzati da una lunghezza d'onda molto ampia e quindi da una separazione notevole tra i vari antinodi del potenziale ( $d = 5.3 \mu\text{m}$ ), permettono la realizzazione di catene lineari di condensati che possono essere risolti e manipolati otticamente in modo individuale [CSH00]; poichè in questo caso la frequenza del laser è distante più di un ordine di grandezza dalla più vicina transizione dipolare atomica i fenomeni di *scattering* spontaneo sono largamente soppressi (si hanno all'incirca un evento ogni 600 s) ed è dunque atteso un grande tempo di coerenza dei singoli siti. Questi sistemi si presentano come i candidati ideali per implementare *array* di "qubits" necessari alla realizzazione degli schemi di computazione quantistica.



## Capitolo 4

# Riduzione di dimensionalità

“Less is More”  
(Mies van der Rohe)

In tutti i campi della fisica (e della scienza in generale) la chiave per la risoluzione di un problema sta nel semplificare il modello utilizzato, isolando i parametri fondamentali ed includendo le proprietà salienti dell’oggetto sotto esame nel modello stesso.

Si pensi ad esempio al problema dei due corpi, analizzato da I. Newton nel suo trattato di astronomia: un uso appropriato delle simmetrie presenti permette di ricondurre lo studio di un moto tridimensionale alla risoluzione di equazioni monodimensionali tra loro disaccoppiate.

Gli attuali metodi di confinamento magnetico e/o ottico permettono la realizzazione di trappole completamente anisotrope, con forza di confinamento non lineare e diversa per ciascuno dei tre assi. Tuttavia, per semplificare la comprensione dell’esperimento e la leggibilità dei risultati, si utilizzano in genere per i condensati di Bose-Einstein potenziali armonici nelle singole direzioni, con due delle tre frequenze scelte uguali. L’apparato finale risulta quindi ben descritto da un modello a simmetria cilindrica: il campione assume una forma “a disco” nel caso in cui la forza confinante assiale sia maggiore di quella radiale, mentre si ottiene un oggetto “a sigaro” nella situazione opposta.

I condensati immersi in reticoli ottici unidimensionali mantengono le caratteristiche di simmetria sopra descritte poiché sperimentalmente il potenziale sinusoidale viene posto nella direzione assiale, così da preservare il carattere cilindrico del modello.

Se l’azione che descrive il sistema fosse separabile nelle variabili trasversale e radiali, la soluzione potrebbe essere descritta da due equazioni disaccoppiate, descrittive ciascuna l’evoluzione nelle due direzioni. Nel caso della GPE la presenza del termine non lineare rende tuttavia il problema intrinsecamente non separabile: anche l’utilizzo di una forma iniziale fattorizzata porta ad un sistema di due equazioni accoppiate.

Spesso la dinamica lungo una delle due coordinate non risulta particolarmente significativa e può essere interessante cercare di introdurre una ipotesi supplementare (fenomenologica) sulla forma della soluzione per ridursi ad una sola equazione. Naturalmente questa è una approssimazione che va valutata volta per volta, sulla base dell'intuizione e che può essere verificata a posteriori, effettuando ad esempio paragoni con dati ottenuti sperimentalmente o dall'analisi numerica del modello completo.

Esamineremo in questo capitolo le diverse possibilità, presentate fino ad oggi in letteratura, che permettono di ridurre il problema ad una sola equazione per la variabile assiale (radiale).

#### 4.1 Condensati ad auto-interazione molto debole

Nella GPE tridimensionale il termine nonlineare è composto da una costante di interazione  $g$  (eq. (2.5)) che moltiplica una densità volumetrica ( $|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$ ); in una equazione 1D il termine  $|\psi(z, t)|^2$  è una densità lineare e dunque, per preservare le dimensioni del termine di autointerazione, la costante  $g$  andrà divisa per una quantità comparabile ad un'area.

Se l'evoluzione nelle due direzioni radiale e trasversa fosse disaccoppiata, nel passare da un'equazione 3D ad una 1D sarebbe ragionevole dividere la costante di accoppiamento per una superficie trasversa "caratteristica" del condensato. Nel limite di piccola interazione un pacchetto d'onda bidimensionale immerso in un potenziale armonico con frequenza caratteristica  $\omega_\perp$  ha forma gaussiana con larghezza pari a  $a_x = a_y = a_\perp = \sqrt{\hbar/m\omega_\perp}$  e quindi un raggio quadratico medio pari a:

$$\sqrt{\langle R^2 \rangle} = \sqrt{\langle X^2 \rangle + \langle Y^2 \rangle} = \sqrt{2}a_\perp$$

Una possibilità per ridurre la dimensionalità dell'equazione è dunque quella di dividere  $g$  per la sezione caratteristica  $2\pi a_\perp^2$ , ottenendo così la seguente espressione:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(z, t)}{\partial t} = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + V(z) + \frac{gN}{2\pi a_\perp^2} |\psi(z, t)|^2 \right\} \psi(z, t) \quad (4.1)$$

Dalle ipotesi sfruttate per ottenere la 4.1 discende che questa forma unidimensionale della GPE sarà una buona approssimazione al problema reale nel caso di piccola nonlinearietà (piccola lunghezza di *scattering* e/o piccolo numero di atomi) e potenziale trasverso armonico: solo in queste condizioni infatti la dinamica trasversa non influenza quella radiale e la sezione trasversa ha dimensione  $\sqrt{2}a_\perp$ .

Questa ipotesi per una equazione 1D è stata proposta da vari autori, ad esempio Jackson *et al.* [JKP98] oppure Steel e Zhang [SZ98].

## 4.2 Ipotesi di costanza delle dimensioni lineari

Un'altro metodo possibile per ottenere una equazione a dimensionalità ridotta consiste nell'imporre che le manipolazioni algebriche non modifichino le dimensioni spaziali della soluzione; questa condizione può essere facilmente soddisfatta nell'approssimazione di Thomas-Fermi, all'interno della quale, come visto nel cap. 2, il potenziale chimico determina completamente l'ampiezza radiale ed assiale del condensato.

La generica equazione di Gross-Pitaevskii  $d$ -dimensionale, in presenza di un potenziale armonico anisotropo, è:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{m}{2} \sum_{i=1}^d \omega_i^2 x_i^2 + U_0^{(d)} N |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right\} \Psi(\mathbf{r}, t) \quad (4.2)$$

dove la forma specifica di  $U_0^{(d)}$  dipende dalla dimensionalità; per  $d=3$  vale:

$$U_0^{(3)} = g \equiv \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m}. \quad (4.3)$$

Il calcolo analitico di  $U_0^{(d)}$  è possibile all'interno dell'approssimazione di Thomas-Fermi; trascurando il termine cinetico (detto anche di pressione quantistica) infatti si ha una semplice espressione per la funzione d'onda stazionaria:

$$|\Psi_{TF}(\mathbf{r})|^2 = \begin{cases} \frac{\mu_{TF} - V(\mathbf{r})}{U_0^{(d)} N} & \text{se } \mu_{TF} - V(\mathbf{r}) > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (4.4)$$

Il valore del potenziale chimico può essere allora ricavato imponendo la normalizzazione della funzione d'onda [TBJ00]:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_V d^d \mathbf{r} |\Psi_{TF}(\mathbf{r})|^2 = & (4.5) \\ &= \int_V d^d \mathbf{r} \frac{1}{U_0^{(d)} N} \left[ \mu_{TF} - \frac{m}{2} \sum_{i=1}^d \omega_i^2 x_i^2 \right] = \\ &= \frac{\mu_{TF}}{U_0^{(d)} N} (\bar{R}_{TF})^d \int_{S_1^{(d)}} d^d \mathbf{r} [1 - \mathbf{r}^2] = \\ &= \frac{\mu_{TF}}{U_0^{(d)} N} (\bar{R}_{TF})^d \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \int_0^1 dr r^{d-1} [1 - r^2] = \\ &= \frac{\mu_{TF}}{U_0^{(d)} N} (\bar{R}_{TF})^d \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{d+2} \right) = \\ &= \frac{\mu_{TF}}{U_0^{(d)} N} (\bar{R}_{TF})^d \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2 + 2)} \end{aligned}$$

dove  $\bar{\omega} = \sqrt[d]{\prod_{i=1}^d \omega_i} \times \dots \times \omega_d$  è la media geometrica delle frequenze,  $\bar{R}_{TF} = \sqrt{2\mu/m\bar{\omega}^2}$  il raggio medio di Thomas-Fermi e  $S_1^{(d)}$  e la sfera  $d$ -dimensionale di raggio unitario  $S_1^{(d)}$ , la cui superficie vale  $2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ .

Si arriva così ad una espressione per la costante di autointerazione che dipende solo dalla dimensionalità e dal potenziale chimico:

$$U_0^{(d)} = \frac{\mu_{TF}}{N} (\bar{R}_{TF})^d \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2 + 2)} \quad (4.6)$$

Dalle eq. (4.3) e (4.6) si ha l'espressione esplicita per il potenziale chimico in 3 dimensioni ( $a_{\bar{\omega}} \equiv \sqrt{\hbar/m\bar{\omega}_{(3D)}}$ ):

$$\mu_{TF} = \frac{\hbar\bar{\omega}}{2} \left( \frac{15Na_s}{a_{\bar{\omega}}} \right)^{2/5} \quad (4.7)$$

e l'equazione finale risulta:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left\{ \sum_{i=1}^d \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{m}{2} \omega_i^2 x_i^2 \right) + \frac{\pi^{d/2} \mu_{TF} (\bar{R}_{TF})^d}{\Gamma(d/2 + 2)} |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right\} \Psi(\mathbf{r}, t) \quad (4.8)$$

Quest'ultima espressione risulta valida per qualunque valore di  $d$  ed assicura che, al variare della dimensionalità, il potenziale chimico (e quindi l'estensione spaziale della soluzione) resterà fissato al valore del problema reale 3D.

La trattazione appena svolta risulta esatta in approssimazione di TF ed in presenza del solo potenziale armonico. Un calcolo del potenziale chimico con un potenziale periodico aggiuntivo risulta invece non facilmente affrontabile analiticamente, anche nell'approssimazione di TF: il metodo precedente risulta quindi utilizzabile solo se il reticolo perturba in maniera trascurabile il potenziale armonico.

Chiaramente questo metodo fallisce se le condizioni analizzate sono tali da essere al di fuori dell'approssimazione di TF: in questo caso il potenziale chimico non è calcolabile analiticamente nemmeno in presenza del solo potenziale armonico ed è quindi impossibile applicare il suddetto ragionamento.

È inoltre possibile prevedere che, nelle condizioni di Thomas-Fermi (soddisfatte in moltissimi degli esperimenti realizzati), l'evoluzione generata da una qualsiasi GPE unidimensionale, quale ad esempio la (4.1) o la (4.8), risulterà sostanzialmente differente da quella prodotta dal modello originario 3D. Vedremo infatti nel prossimo capitolo che l'estensione assiale di un condensato, inizialmente intrappolato in un potenziale armonico, nel limite di Thomas-Fermi evolve durante un'espansione libera proporzionalmente ad un parametro  $\lambda_z$ , che nel modello 1D soddisfa:

$$\ddot{\lambda}_z(t) = \frac{\omega_z^2(0)}{\lambda_z(t)^2}$$

mentre nel caso reale 3D obbedisce a:

$$\ddot{\lambda}_z(t) = \frac{\omega_z^2(0)}{\lambda_z^2(t)\lambda_\perp^2(t)}$$

$$\left( \text{con } \ddot{\lambda}_\perp(t) = \frac{\omega_\perp^2(0)}{\lambda_z(t)\lambda_\perp^3(t)} \right).$$

con le condizioni iniziali  $\lambda(0) = 1$ ,  $\dot{\lambda}(0) = 0$ . Non è difficile prevedere che la prima equazione comporta una crescita molto più rapida del parametro  $\lambda_z$ , ovvero delle dimensioni assiali del condensato.

Le equazioni unodimensionali presentate non sono dunque sicuramente buoni modelli per descrivere l'espansione libera del sistema (mentre, come visto, esse possono essere appropriate per trovare lo stato fondamentale rispettivamente nelle due approssimazioni proposte).

### 4.3 Ipotesi gaussiana nella direzione trasversale

Come ben noto, lo stato fondamentale di un pacchetto d'onda quantistico di singola particella all'interno di un potenziale armonico ha una forma gaussiana. In presenza di un potenziale a simmetria cilindrica, con componente radiale armonica, può essere allora plausibile anche per un condensato interagente un *Ansatz* di tipo gaussiano per la forma trasversale della funzione d'onda. Questo modello, sviluppato da Salasnich *et al.* [Sal01, SPR02], porta ad una equazione di Gross-Pitaevskii modificata, chiamata NPSE (Non Polynomial Schrödinger Equation), dipendente solo dalla variabile assiale: la dinamica radiale, descritta dalla larghezza  $\sigma_o(z, t)$ , risulta espressa da una equazione algebrica chiusa, funzione della parte assiale.

La NPSE può essere ricavata tramite una derivazione funzionale, in presenza di un potenziale armonico nella direzione radiale e generico in quella assiale:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\omega_\perp^2 r^2 + V(z)$$

L'azione corrispondente alla GPE è allora data da:

$$S[\Psi] = \int dt \int d^3\mathbf{r} \Psi^* \left\{ i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{1}{2}m\omega_\perp^2 r^2 - V(z) - \frac{gN}{2}|\Psi|^2 \right\} \Psi \quad (4.9)$$

Effettuando ora per la funzione d'onda l'*Ansatz* fattorizzato:

$$\begin{cases} \Psi(\mathbf{r}, t) = \phi(r, t; \sigma_o(z, t))\psi(z, t) \\ \phi(r, t; \sigma_o(z, t)) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma_o} e^{-r^2/2\sigma_o^2} \end{cases}$$

con normalizzazione  $\int dz |\psi(z, t)|^2 = 1$  e sotto l'ipotesi supplementare che  $\nabla^2 \phi \approx \nabla_{\perp}^2 \phi$ , ovvero che la larghezza trasversa sia una funzione "a variazione lenta" rispetto alla variabile assiale<sup>1</sup>, è possibile riscrivere l'azione come:

$$S[\Psi] = \int dt \int dz \psi^* \left\{ i\hbar \partial_t + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_z^2 - V(z) - \frac{1}{2} gN |\psi|^2 \int dr 2\pi r |\phi|^4 \right\} \psi + \\ + \int dt \int dz \psi^* \left\{ \int dr 2\pi r \phi^* \left[ i\hbar \partial_t + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\perp}^2 - \frac{1}{2} m\omega_{\perp}^2 r^2 \right] \phi \right\} \psi$$

L'uso delle seguenti identità:

$$i\hbar \int dr 2\pi r \cdot \phi^* \dot{\phi} = 0 \\ \frac{\hbar^2}{2m} \int dr 2\pi r \cdot \phi^* \nabla_{\perp}^2 \phi = -\frac{\hbar^2}{2m\sigma_o^2} \\ -\frac{1}{2} m\omega_{\perp}^2 \int dr 2\pi r \cdot r^2 |\phi|^2 = -\frac{1}{2} m\omega_{\perp}^2 \sigma_o^2 \\ \int dr 2\pi r \cdot |\phi|^4 = \frac{1}{2\pi\sigma_o^2}$$

permette di integrare l'azione sulle coordinate radiali e di arrivare alla forma finale per l'azione:

$$S[\Psi] = \int dt \int dz \mathcal{L}(z, t, \sigma(z, t)) = \\ = \int dt \int dz \psi^* \left\{ i\hbar \partial_t + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_z^2 - V(z) - \frac{gN}{2} \frac{|\psi|^2}{2\pi\sigma_o^2} - \frac{\hbar^2}{2m\sigma_o^2} - \frac{m\omega_{\perp}^2 \sigma_o^2}{2} \right\} \psi$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \chi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \chi} - \partial_{\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu} \chi)} \quad (4.10)$$

applicate all'azione permettono di ricavare le equazioni del moto per la larghezza trasversa:

$$\sigma_o(z, t) = a_{\perp} \sqrt[4]{1 + 2a_s N |\psi^2(z, t)|} \quad (4.11)$$

e per la funzione d'onda assiale, la NPSE:

$$i\hbar \dot{\psi}(z, t) = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_z^2 + V(z) + \frac{gN}{2\pi\sigma_o^2} |\psi(z, t)|^2 + \frac{\hbar\omega_{\perp}}{2} \left( \frac{a_{\perp}^2}{\sigma_o^2} + \frac{\sigma_o^2}{a_{\perp}^2} \right) \right\} \psi(z, t) \quad (4.12)$$

È interessante notare che la larghezza della gaussiana risulta descritta da una semplice equazione algebrica e non differenziale come ci si aspetterebbe

<sup>1</sup>Un'approfondimento su questo punto è riportato nell'appendice B.



consuetamente: l'aver trascurato il termine cinetico assiale per  $\sigma_o$  ha infatti portato all'assenza di termini derivativi nell'espressione.

Le due equazioni sono ancora accoppiate, ma si può ora sostituire l'espressione esplicita di  $\sigma_o$  nell'equazione per  $\psi$ , riducendosi così alla risoluzione di una sola equazione differenziale, accoppiata ad una equazione algebrica da risolvere solo quando si voglia conoscere l'effettiva forma del pacchetto.

Osserviamo che, a confronto con la GPE originaria (2.9), l'ipotesi gaussiana sulla parte trasversa comporta una modifica del coefficiente della parte nonlineare e la presenza di due termini aggiuntivi nell'eq. (4.12).

Come si può dedurre dai passaggi effettuati per arrivare all'azione semplificata, gli ultimi due termini presenti nella NPSE discendono dai contributi all'Hamiltoniana totale generati rispettivamente dalla parte cinetica e potenziale della gaussiana trasversale.

La modifica del coefficiente  $g$  può essere interpretata come un raffinamento del metodo sviluppato nel par. 4.1:  $g$  viene diviso per una sezione efficace che questa volta risulta dipendente dai parametri del condensato ( $a_s$  e  $N$ ) e in particolare funzione della coordinate assiale e temporale tramite la densità  $|\psi(z, t)|^2$ . Essendo dedotta con un procedimento variazionale,  $\sigma_o$  si adatta allo stato del sistema, minimizzando l'energia in ogni istante dell'evoluzione.

Nel limite di bassa interazione ( $a_s N |\psi|^2 \ll 1$ ) si ha  $\sigma_o \approx a_\perp$  e la NPSE si riduce alla forma proposta nel par. 4.1 (trascurando fattori additivi costanti che non influenzano la dinamica).

Nel limite opposto di forte interazione (o di Thomas-Fermi) si ha invece:

$$i\hbar\dot{\psi}(z, t) = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_z^2 + V(z) + \frac{3}{2} \frac{g\sqrt{N}}{2\pi a_\perp^2 \sqrt{2a_s}} |\psi(z, t)| \right\} \psi(z, t) \quad (4.13)$$

Nelle due approssimazioni presentate si nota un fatto importante: al passare dal caso debolmente a quello fortemente interagente, cambia il carattere nonlineare dell'equazione (l'esponente del termine di densità passa da 2 ad 1, ovvero l'equazione cambia da cubica a quadratica).

Trascurando il termine di derivate spaziali, la versione stazionaria dell'eq. (4.13) ammette la seguente soluzione analitica:

$$|f(z)|^2 = \frac{2}{9} \frac{1}{(\hbar\omega_\perp)^2 a_s N} [\mu - V(z)]^2; \quad (4.14)$$

la natura quadratica dell'equazione originaria genera nella forma di Thomas-Fermi una dipendenza quadratica da  $[\mu - V(z)]$ , invece che lineare come si ottiene in tale limite per una generica equazione di Gross-Pitaevskii  $d$ -dimensionale.

È da notare infine che l'espressione (4.14) può essere ottenuta a partire dall'equazione 3D, effettuando prima il limite di Thomas-Fermi ed in seguito integrando sulle variabili  $x$  ed  $y$  (con la sola differenza che il fattore moltiplicativo trovato sarebbe  $1/4$  invece di  $2/9$ ).

La NPSE è stata fino ad ora utilizzata per descrivere condensati nello stato fondamentale di una trappola armonica “a sigaro”, ottenendo per la densità assiale un accordo con la soluzione esatta 3D molto migliore di quelli presentati dagli altri modelli unidimensionali descritti nel presente capitolo. L'equazione è stata successivamente impiegata per studiare le eccitazioni collettive del condensato.

Riteniamo quest'ultimo metodo il più adatto a ridurre la dimensionalità del problema proprio per il suo carattere “dinamico” e lo utilizzeremo per studiare condensati in presenza di un reticolo ottico, adattandolo anche al caso dell'espansione libera, come mostreremo nel prossimo capitolo.

## Capitolo 5

# Evoluzione in potenziali dipendenti dal tempo

A partire da una tecnica di *scaling* comunemente utilizzata, verrà in questo capitolo derivata una nuova equazione unidimensionale per descrivere l'evoluzione di condensati in potenziali armonici anisotropi dipendenti dal tempo. L'applicazione di questa teoria ad un particolare esperimento verrà discussa nel successivo capitolo 7.

### 5.1 Riscaldamento dinamico del reticolo

Nello sviluppo di questa tesi è stato fatto uso di un'idea, elaborata da vari autori [CD96, KSS96, KSS97], che permette di estendere l'approssimazione di Thomas-Fermi a potenziali armonici dipendenti dal tempo.

La modifica del potenziale esterno causa una variazione delle scale fondamentali di lunghezza del problema, identificate con  $a_z$  e  $a_\perp$ ; l'idea è allora quella di effettuare una trasformazione di coordinate in modo che, nel nuovo sistema di riferimento, le lunghezze caratteristiche risultino costanti.

A partire dal comportamento di un gas classico (analizzato nell'appendice A), in ref. [CD96] vengono derivate un riscaldamento di coordinate ed una trasformazione di gauge da inserire come *Ansatz* nella funzione d'onda: questa ipotesi permette di arrivare ad una equazione per una funzione d'onda "ridotta" dalla quale è stato tolto il momento locale dovuto all'evoluzione del gas classico. La funzione d'onda "ridotta" si muove in un potenziale fittizio costante e le modificazioni dovute alla variazione del potenziale sono descritte esclusivamente dai parametri di scala.

Il metodo sopracitato consiste nel riscrivere la funzione d'onda nella forma:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = e^{-i\beta(t)} e^{\frac{im}{2\hbar} \sum r_j \cdot r_j \frac{\dot{\lambda}_j(t)}{\lambda_j(t)}} \frac{\tilde{\Psi}\left(\left\{\frac{r_j}{\lambda_j(t)}\right\}, t\right)}{\sqrt{\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)}} \quad (5.1)$$

e nel postulare per i parametri di scala  $\lambda$  le seguenti:

$$\ddot{\lambda}_j(t) = \frac{\omega_j^2(0)}{\lambda_j(t)\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)} - \omega_j^2(t)\lambda_j(t) \quad (5.2)$$

con le condizioni iniziali  $\lambda(0) = 1$  e  $\dot{\lambda}(0) = 0$ .

L'operazione  $\Psi \rightarrow \tilde{\Psi}$  è una trasformazione unitaria che comporta:

- un fattore di fase globale (ininfluente per quanto riguarda la dinamica del sistema),
- una trasformazione di gauge locale (dal momento totale viene sottratto il momento locale di un gas classico in espansione<sup>1</sup>),
- un riscaldamento delle coordinate.

Scegliendo  $\beta(t)$  tale che  $\dot{\beta} = \mu/\hbar\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ , la sostituzione della forma riscala (5.1) nella GPE (2.9) con potenziale armonico anisotropo porta<sup>2</sup> alla seguente equazione di evoluzione per la funzione ridotta:

$$i\hbar\partial_t\tilde{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_j \frac{\partial_{r_j}^2}{\lambda_j^2(t)} + \frac{m}{2} \sum_j r_j^2 \left( \omega_j^2(t) + \frac{\lambda_j''(t)}{\lambda_j(t)} \right) + \frac{gN|\tilde{\Psi}(\mathbf{r}, t)|^2 - \mu}{\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)} \right\} \tilde{\Psi}(\mathbf{r}, t)$$

con la condizione iniziale  $\tilde{\Psi}(\mathbf{r}, 0) = \Psi(\mathbf{r}, 0)$ .

L'inserimento della (5.2) in quest'ultima comporta l'eliminazione, all'interno della parentesi tonda, del termine  $\omega_j^2(t)$ :

$$i\hbar\partial_t\tilde{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_j \frac{\partial_{r_j}^2}{\lambda_j^2(t)} + \frac{m}{2} \sum_j r_j^2 \left( \frac{\omega_j^2(0)}{\lambda_j^2(t)\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)} \right) + \frac{gN|\tilde{\Psi}(\mathbf{r}, t)|^2 - \mu}{\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)} \right\} \tilde{\Psi}(\mathbf{r}, t)$$

e quindi conduce alla forma finale:

$$i\hbar\partial_t\tilde{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_j \frac{\partial_{r_j}^2}{\lambda_j^2(t)} + \frac{V(\mathbf{r}, 0) + gN|\tilde{\Psi}(\mathbf{r}, t)|^2 - \mu}{\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)} \right\} \tilde{\Psi}(\mathbf{r}, t). \quad (5.3)$$

Come si può dedurre dai calcoli presentati, l'*Ansatz* per l'evoluzione dei parametri di *scaling* ha sostituito al potenziale armonico all'istante  $t$  il suo

<sup>1</sup>Nell'appendice A mostriamo il momento del gas classico è dato da:  $\mathbf{p}_{cl}(\mathbf{r}, t) = m\lambda(t)\mathbf{r}(t)/\lambda(t)$ .

<sup>2</sup>I dettagli dei calcoli possono essere dedotti da quelli simili riportati nel par. 5.2.

valore all'istante  $t = 0$ : questo significa che la funzione "ridotta" è immersa in ogni momento in un potenziale fittizio costante. Vedremo che la presenza nell'equazione di un potenziale costante sarà di fondamentale importanza nel seguito del lavoro.

Nel limite di Thomas-Fermi le derivate spaziali possono essere trascurate e l'equazione (5.3) ammette una soluzione riscalata la cui densità è data da:

$$\left| \tilde{\Psi}_{TF}(\mathbf{k}, t) \right|^2 = \left| \tilde{\Psi}_{TF}(\mathbf{k}) \right|^2 = \begin{cases} \frac{\mu_{TF} - \frac{m}{2} \sum \omega_j^2(0) k_j^2}{gN} & \text{se } \mu_{TF} - V(\mathbf{k}, 0) > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

che porta alla seguente forma per la densità reale:

$$\left| \Psi_{TF}(\mathbf{r}, t) \right|^2 = \begin{cases} \frac{\mu_{TF} - \frac{m}{2} \sum \omega_j^2(0) \frac{r_j^2}{\lambda_j^2(t)}}{gN \lambda_1(t) \lambda_2(t) \lambda_3(t)} & \text{se } \mu_{TF} - V(\mathbf{r}/\boldsymbol{\lambda}, 0) > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con la caratteristica forma a paraboloido invertito, questa volta però dipendente dal tempo.

Per un sistema che verifichi solo in parte le ipotesi di Thomas-Fermi, l'equazione (5.3) prevede comunque che  $|\tilde{\Psi}|^2$  evolva in maniera molto lenta, in quanto il termine di energia cinetica e il numeratore della frazione nel membro di destra risultano piccoli.

Per illustrare l'utilità della trasformazione introdotta consideriamo il caso di apertura istantanea al tempo  $t = 0$  di una trappola a simmetria cilindrica e a forma di sigaro (ovvero con  $\omega_x = \omega_y = \omega_{\perp} \gg \omega_z$ ); introducendo il parametro  $\epsilon \equiv \omega_z(0)/\omega_{\perp}(0) \ll 1$  e la coordinata temporale adimensionale  $\xi \equiv \omega_{\perp}(0)t$ , le equazioni (5.2) semplificano in:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\xi^2} \lambda_{\perp}(\xi) &= \frac{1}{\lambda_{\perp}^3 \lambda_z} \\ \frac{d^2}{d\xi^2} \lambda_z(\xi) &= \frac{\epsilon^2}{\lambda_{\perp}^2 \lambda_z^2} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Espandendo ora in serie di potenze le soluzioni delle equazioni differenziali, si ottiene all'ordine 0 in  $\epsilon$

$$\lambda_z = 1 \quad \lambda_{\perp}(\xi) = \sqrt{1 + \xi^2} \quad (5.5)$$

e al second'ordine per l'espansione assiale si ha

$$\lambda_z(\xi) = 1 + \epsilon^2 \left( \xi \arctan(\xi) - \ln \sqrt{1 + \xi^2} \right) + O(\epsilon^4). \quad (5.6)$$

Ambedue i parametri di *scaling* ammettono un andamento asintotico lineare e si ottiene per l'*aspect ratio* finale il valore

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{R_{\perp}^{TF}}{R_z^{TF}} = \frac{2}{\pi \epsilon}$$

Osserviamo inoltre che in un calcolo numerico il numero di punti del reticolo è spesso un fattore critico, che condiziona pesantemente la memoria utilizzata e la durata del calcolo stesso; l'utilizzo del riscaldamento dinamico permette un significativo risparmio di tempo e risorse, in quanto consente di lavorare con reticoli la cui estensione è molto minore di quella realmente occupata dal condensato.

Si pensi ad una espansione libera di 30–40 *ms*: tipicamente il condensato aumenta le sue dimensioni assiali di un fattore 2 e quelle radiali di un fattore 10. Si può intuire quanto questo metodo sia fruttuoso dai dati esposti nel paragrafo 6.2: aumentare l'estensione spaziale del reticolo senza diminuire la densità di punti costringerebbe a compiere trasformate di Fourier di vettori più grandi, con un aumento del tempo di calcolo pari ad un fattore

$$\frac{2N \log_2 2N}{N \log_2 N} = 2 \left( 1 + \frac{\log_2 2}{\log_2 N} \right) \approx 2$$

per un caso unidimensionale (e ad un fattore  $200N \log_2(200N)/N \log_2 N \approx 200$  per un calcolo tridimensionale)<sup>3</sup>.

È da notare infine che il trattamento sviluppato fin ora è esatto e non comporta alcuna approssimazione: la trasformazione di gauge ha assorbito in un'equazione differenziale per i parametri di *scaling* il momento dovuto all'espansione del gas classico (ovvero di quello in approssimazione di Thomas-Fermi), lasciando alla funzione “ridotta” solo l'evoluzione dovuta al suo scostamento da tale stato, oppure alla non-armonicità del potenziale.

## 5.2 Equazione unidimensionale di evoluzione

L'obiettivo di questo lavoro è scrivere un'equazione 1D in grado di descrivere con completezza i fenomeni di tipo assiale, senza perdere di vista i gradi di libertà trasversali, in presenza di potenziali dipendenti dal tempo. Il prezzo pagato per ridurre la dimensionalità del problema consiste nell'introdurre approssimazioni in grado di semplificare il problema senza stravolgerne le proprietà fisiche. Di seguito verrà sviluppato il procedimento logico seguito per ricavare l'equazione.

Come prima approssimazione all'equazione completa, seguendo il modello proposto da Salasnich *et al.* [Sal01, SPR02], postuliamo una funzione d'onda fattorizzata a simmetria cilindrica; per quanto riguarda la parte trasversa, si è mantenuta l'ipotesi gaussiana, poiché tale scelta permette di risolvere analiticamente tutte le integrazioni sulle variabili radiali.

La formulazione originaria, nella quale  $\sigma_o(z, t) = a_{\perp} \sqrt[4]{1 + 2a_s N |\psi(z, t)|^2}$ , non si presta tuttavia a una generalizzazione immediata al problema in esame nel presente lavoro: nell'articolo citato, infatti, la deduzione dell'equazione

---

<sup>3</sup>Per un esempio di applicazione della tecnica di *scaling* ad un'equazione tridimensionale si veda [MPC02].

è stata effettuata in presenza di un potenziale esterno costante nel tempo. Come si vede, la forma funzionale di  $\sigma_o$  contiene esplicitamente la grandezza caratteristica  $a_\perp$ , che tuttavia varia al variare della forma del potenziale armonico esterno. Se si volesse ad esempio utilizzare l'originale equazione per descrivere l'espansione libera di un gas, la teoria darebbe risultati non consistenti; ponendo  $a_\perp = \sqrt{\hbar/m\omega_\perp(0)}$  si otterrebbe durante l'espansione un restringimento delle dimensioni trasverse; se invece si usasse  $a_\perp = \sqrt{\hbar/m\omega_\perp(t)}$  si otterrebbe per  $t > 0$  un valore infinito della larghezza  $\sigma_o$ <sup>4</sup>.

La risoluzione all'apparente difficoltà può essere trovata coniugando la NPSE con l'idea del riscaldamento dinamico: come anticipato nel paragrafo precedente la funzione d'onda "ridotta" risulta immersa in ogni istante dell'espansione in un potenziale fittizio armonico e costante.

La presenza di questo termine effettivo non comporta nessuna approssimazione supplementare sulla soluzione e nasce esclusivamente dalla particolare forma della trasformazione di gauge imposta: esso risulterà dunque presente anche quando la trasformazione venga effettuata sulla NPSE.

Proprio questo termine permetterà inoltre di ottenere un valore sempre finito per la larghezza trasversa, anche nel caso di apertura istantanea del potenziale di trappola.

La forma completa dell'*Ansatz* è dunque:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi(\mathbf{r}, t) = \phi(r, t; \sigma(z, t)) \psi(z, t) \\ \phi(r, t; \sigma(z, t)) = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma\lambda_\perp(t)}} e^{\frac{im}{2\hbar} r^2 \frac{\dot{\lambda}_\perp(t)}{\lambda_\perp(t)}} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2\lambda_\perp^2(t)}} \\ \psi(z, t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_z(t)}} e^{\frac{im}{2\hbar} z^2 \frac{\dot{\lambda}_z(t)}{\lambda_z(t)}} \tilde{\psi}\left(\left\{\frac{z}{\lambda_z(t)}\right\}, t\right) \end{array} \right.$$

con la normalizzazione ( $k \equiv z/\lambda_z$ ):

$$\int dz |\psi(z, t)|^2 = \int dk |\tilde{\psi}(k, t)|^2 = 1$$

e le equazioni di evoluzione (5.2) per i parametri  $\boldsymbol{\lambda}$ :

$$\ddot{\lambda}_j(t) = \frac{\omega_j^2(0)}{\lambda_j(t)\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)} - \omega_j^2(t)\lambda_j(t)$$

con le condizioni iniziali  $\boldsymbol{\lambda}(0) = 1$  e  $\dot{\boldsymbol{\lambda}}(0) = 0$ .

La gaussiana trasversa presenta quindi una larghezza reale pari a:

$$\Sigma(z, t) \equiv \sigma(z, t)\lambda_\perp(t).$$

---

<sup>4</sup>Il risultato è intuibile, in quanto la formulazione variazionale utilizzata per dedurre la NPSE trova, data l'energia al tempo  $t$ , il valore di  $\sigma_o$  che rende stazionaria l'azione, ovvero quello di minima energia, che corrisponde in questo caso al condensato completamente disperso nello spazio e quindi descritto da una larghezza infinita.

Questa forma tentativa corrisponde a imporre alla parte trasversa una larghezza che risulti il prodotto del parametro di *scaling* radiale di una Thomas-Fermi per una quantità dedotta variazionalmente: ci si aspetta dunque che le dimensioni trasverse di  $\phi$  sul reticolo riscaldato (controllate dalla larghezza  $\sigma$ ) varino lentamente nel tempo, in quanto la gran parte dell'evoluzione trasversa dovrebbe essere ceduta al parametro  $\lambda_\perp$ .

Data l'azione di Gross-Pitaevskii per l'evoluzione in presenza di un potenziale combinato, costituito da una componente armonica anisotropa dipendente dal tempo e da una parte supplementare  $V_+$  assiale generica:

$$S[\Psi] = \int dt \int d^3\mathbf{r} \Psi^* \left\{ i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{1}{2}m \sum_{j=z,\perp} \omega_j^2(t)r_j^2 - V_+(z,t) - \frac{gN}{2}|\Psi|^2 \right\} \Psi \quad (5.7)$$

riportiamo di seguito i calcoli, in parte analoghi a quelli svolti nel par. 4.3, necessari per sostituire la nuova forma fattorizzata di  $\Psi$  nell'espressione per l'azione (5.7).

Sviluppo della derivata temporale di  $\phi$ :

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t\phi &= \left( -i\hbar\frac{\dot{\lambda}_\perp}{\lambda_\perp} - \frac{m}{2}r^2\frac{\ddot{\lambda}_\perp}{\lambda_\perp} + \frac{m}{2}r^2\frac{\dot{\lambda}_\perp^2}{\lambda_\perp^2} + i\hbar r^2\frac{\dot{\lambda}_\perp}{\sigma^2\lambda_\perp^3} + i\hbar\frac{\dot{\sigma}}{\sigma}\left[\frac{r^2}{\sigma^2} - 1\right] \right) \phi = \\ &= \left( -i\hbar\frac{\dot{\lambda}_\perp}{\lambda_\perp} - \frac{m\omega_\perp^2(0)}{2}r^2\frac{1}{\lambda_z\lambda_\perp} + \frac{m}{2}\omega_\perp^2(t)r^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{m}{2}r^2\frac{\dot{\lambda}_\perp^2}{\lambda_\perp^2} + i\hbar r^2\frac{\dot{\lambda}_\perp}{\sigma^2\lambda_\perp^3} + i\hbar\frac{\dot{\sigma}}{\sigma}\left[\frac{r^2}{\sigma^2} - 1\right] \right) \phi \end{aligned}$$

Sviluppo del termine cinetico proveniente da  $\phi$ :

$$\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_\perp^2\phi = \left( i\hbar\frac{\dot{\lambda}_\perp}{\lambda_\perp} - \frac{\hbar^2}{m\sigma^2\lambda_\perp^2} - \frac{m}{2}r^2\frac{\dot{\lambda}_\perp^2}{\lambda_\perp^2} - i\hbar r^2\frac{\dot{\lambda}_\perp}{\sigma^2\lambda_\perp^3} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{r^2}{\sigma^4\lambda_\perp^4} \right) \phi$$

Si ha allora:

$$\int d\mathbf{r} 2\pi r \cdot \phi^* \left( i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla_\perp^2 - \frac{m}{2}\omega_\perp^2(t)r^2 \right) \phi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\sigma^2\lambda_\perp^2} - \frac{m\omega_\perp^2(0)}{2}\frac{\sigma^2}{\lambda_z\lambda_\perp^2}$$

Integrazione radiale del termine di interazione:

$$\int d\mathbf{r} 2\pi r \cdot |\phi|^4 = \frac{1}{2\pi\sigma^2\lambda_\perp^2}$$

Sviluppo della derivata temporale di  $\psi$ :

$$i\hbar\partial_t\psi = \frac{e^{\frac{im}{2\hbar}z^2\frac{\dot{\lambda}_z}{\lambda_z}}}{\sqrt{\lambda_z}} \left( -\frac{i\hbar}{2}\frac{\dot{\lambda}_z}{\lambda_z} - \frac{m}{2}z^2 \left( \frac{\ddot{\lambda}_z}{\lambda_z} - \frac{\dot{\lambda}_z^2}{\lambda_z^2} \right) \right)$$



$$\begin{aligned}
& + i\hbar\partial_t - i\hbar z \frac{\dot{\lambda}_z}{\lambda_z^2} \partial_k \Big) \tilde{\psi}(k) \\
= & \frac{e^{\frac{im}{2\hbar} z^2 \frac{\dot{\lambda}_z}{\lambda_z}}}{\sqrt{\lambda_z}} \left( -\frac{i\hbar}{2} \frac{\dot{\lambda}_z}{\lambda_z} - \frac{m}{2} z^2 \frac{\omega_z^2(0)}{\lambda_z^3 \lambda_\perp^2} + \frac{m}{2} \omega_z^2(t) z^2 + \frac{m}{2} z^2 \frac{\dot{\lambda}_z^2}{\lambda_z^2} \right. \\
& \left. + i\hbar\partial_t - i\hbar z \frac{\dot{\lambda}_z}{\lambda_z^2} \partial_k \right) \tilde{\psi}(k)
\end{aligned}$$

Sviluppo del termine cinetico proveniente da  $\psi$ :

$$\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_z^2 \psi = \frac{e^{\frac{im}{2\hbar} z^2 \frac{\dot{\lambda}_z}{\lambda_z}}}{\sqrt{\lambda_z}} \left( \frac{i\hbar}{2} \frac{\dot{\lambda}_z}{\lambda_z} + i\hbar z \frac{\dot{\lambda}_z}{\lambda_z^2} \partial_k - \frac{m}{2} z^2 \frac{\dot{\lambda}_z^2}{\lambda_z^2} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\lambda_z^2} \nabla_k^2 \right) \tilde{\psi}(k)$$

Se ora si utilizza un procedimento variazionale sull'azione così semplificata, si ottengono per  $\tilde{\psi}$  e  $\sigma$  due equazioni differenziali accoppiate e quindi un modello bidimensionale di evoluzione. Una discussione più approfondita di questo punto è riportata nell'appendice B.

Se invece, seguendo [Sal01], si considera  $\phi$  come una funzione "lenta" di  $z$ , ovvero si approssima  $\nabla^2 \phi \approx \nabla_\perp^2 \phi$ , si arriva alla forma finale per l'azione, espressa completamente in funzione della variabile riscalata  $k$ :

$$\begin{aligned}
S[\Psi] = \int dt \int dk \tilde{\psi}^*(k) \Big\{ & i\hbar\partial_t + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\lambda_z^2} \nabla_k^2 - \frac{m\omega_z^2(0)}{2} \frac{k^2}{\lambda_z \lambda_\perp^2} - \tilde{V}_+(k, t) + \\
& - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sigma^2 \lambda_\perp^2} - \frac{m\omega_\perp^2(0)}{2} \frac{\sigma^2}{\lambda_z \lambda_\perp^2} - \frac{1}{2} \frac{gN}{2\pi\sigma^2} \frac{|\tilde{\psi}|^2}{\lambda_z \lambda_\perp^2} \Big\} \psi(k) \quad (5.8)
\end{aligned}$$

Da questa si possono, tramite le equazioni di Eulero-Lagrange (4.10), estrapolare le equazioni del moto per la larghezza  $\sigma$ :

$$\sigma(k, t) = a_\perp \sqrt[4]{\lambda_z(t) + 2a_s N |\tilde{\psi}(k, t)|^2} \quad (5.9)$$

che conduce ad una larghezza reale, espressa in termine della funzione d'onda originaria, pari a:

$$\Sigma(z, t) \equiv \sigma(z, t) \lambda_\perp(t) = a_\perp \lambda_\perp(t) \sqrt[4]{\lambda_z(t) \left( 1 + 2a_s N |\psi(z, t)|^2 \right)} \quad (5.10)$$

Effettuando un paragone con la  $\sigma_o$  (4.11) della teoria indipendente dal tempo, vale la seguente uguaglianza:

$$\Sigma = \lambda_\perp \sqrt[4]{\lambda_z} \sigma_o;$$

la presenza del fattore  $\lambda_\perp$  è attesa in quanto postulata nell'*Ansatz* iniziale: esso serve a riscaldare nel tempo la grandezza caratteristica  $a_\perp$  presente in

$\sigma_o$ . La dipendenza dal fattore  $\lambda_z$  risulta invece una caratteristica peculiare di questo modello.

Per la funzione d'onda assiale ridotta  $\tilde{\psi}$  il metodo variazionale fornisce:

$$i\hbar\partial_t\tilde{\psi}(k) = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\lambda_z^2}\nabla_k^2 + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\sigma^2\lambda_\perp^2} + \tilde{V}_+(k, t) + \right. \quad (5.11)$$

$$\left. + \frac{1}{\lambda_z\lambda_\perp^2} \left[ \frac{m\omega_z^2(0)}{2}k^2 + \frac{m\omega_\perp^2(0)}{2}\sigma^2 + \frac{gN}{2\pi\sigma^2}|\tilde{\psi}|^2 \right] \right\} \tilde{\psi}(k)$$

Nel membro di destra dell'equazione si trovano nell'ordine: le parti cinetiche assiale e radiale, il potenziale supplementare assiale, i potenziali fittizi assiale e radiale e il termine di autointerazione riscaldato tramite una sezione efficace.

L'espressione qui trovata è, dal punto di vista matematico, una equazione unidimensionale di Schrödinger non lineare, funzione di variabili riscalate tramite un sistema di equazioni differenziali: introdurremo per identificare l'equazione nel seguito del lavoro il nome di *dynamically rescaled Gross-Pitaevskii Equation* (*dr-GPE*).

Si può verificare che la NPSE (4.12) si ottiene come caso particolare della *dr-GPE* (5.11) in presenza di potenziali armonici non nulli e costanti nel tempo: in queste condizioni infatti la trasformazione unitaria presente nell'eq. (5.1) risulta essere l'identità e quindi la deduzione svolta in questa sezione si riduce a quella del par. 4.3.

Nel caso di potenziali stazionari l'energia totale del sistema è una costante del moto e si conserva durante l'evoluzione; il funzionale energia è ricavabile come integrale della trasformata di Legendre della densità di Lagrangiana (avendo cura di sottrarre da essa la parte contenente la derivata temporale) e, per la GPE libera, è dato da:

$$E[\Psi] = \int d^3\mathbf{r} \left[ \frac{|P\Psi|^2}{2m} + \frac{1}{2}gN|\Psi|^4 \right]. \quad (5.12)$$

Se calcolato per l'equazione 1D appena trovata, discendente dall'azione (5.8), si ottiene:

$$E[\Psi] = \int dz \left[ \frac{|P_z\psi|^2}{2m} + \frac{|P_\perp\phi|^2}{2m}|\psi|^2 + \frac{1}{2}gN \left( \int d^2\mathbf{r}|\phi|^4 \right) |\psi|^4 \right] =$$

$$= \int dk \left[ \frac{1}{2m} \left| \left( \frac{P_k}{\lambda_z} + m\dot{\lambda}_z K \right) \tilde{\psi} \right|^2 + \left( \frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\sigma^2\lambda_\perp^2} + \frac{m}{2}\sigma^2\lambda_\perp^2 \right) |\tilde{\psi}|^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\frac{gN}{2\pi\sigma^2\lambda_\perp^2} \frac{|\tilde{\psi}|^4}{\lambda_z} \right] \quad (5.13)$$

Nell'espressione funzionale si notano nell'ordine i seguenti contributi: le energie cinetiche assiali e radiali e l'energia di interazione. Gli operatori di momento totale dai quali si ricavano le energie cinetiche sono composti ciascuno

dalla somma di due termini: il primo è il momento calcolato nel sistema di coordinate “ridotto”, il secondo è dovuto al riscaldamento stesso del sistema di coordinate e coincide con il momento (A.1) posseduto da un gas classico in espansione. I calcoli dettagliati sono rinviati all’appendice C.

Essendo assente nell’azione utilizzata, il contributo proveniente dal termine  $\nabla_z^2 \phi$  non compare nemmeno nell’espressione dell’energia: l’approssimazione sarà ben posta se questa quantità rimarrà trascurabile rispetto all’energia totale per tutta la durata dell’evoluzione.

L’espressione algebrica dell’energia associata al termine  $\langle \nabla_z^2 \rangle_\phi$ , calcolata nell’appendice B, è data da:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \langle \nabla_z^2 \rangle_\phi &= \frac{\hbar^2}{2m} \int dk \frac{\sigma'^2}{\sigma^2 \lambda_z^2} |\tilde{\psi}|^2 = \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \int dz \frac{\lambda_z^2}{16} \frac{[2a_s N \cdot \partial_z (|\psi|^2)]^2}{(1 + 2a_s N |\psi|^2)^2} |\psi|^2 \end{aligned}$$

(dove  $\sigma' \equiv \partial_k \sigma$ ).

Il termine in questione è dunque piccolo se  $|\psi|^2$  (o equivalentemente  $|\tilde{\psi}|^2$ ) presenta piccole variazioni spaziali, ovvero se l’energia cinetica assiale della funzione d’onda 1D è trascurabile rispetto alle altre quantità.

È stato numericamente verificato che, nello stato fondamentale di una trappola armonica, per un ampio spettro di valori di  $N$  e  $\gamma \equiv \omega_\perp/\omega_z$  il contributo all’energia proveniente dal termine (5.14) è inferiore all’1% dell’energia totale; durante l’espansione inoltre l’energia cinetica assiale cresce in modo molto lento (in quanto l’evoluzione avviene principalmente nella direzione trasversa). Riteniamo dunque che, in assenza del reticolo, l’approssimazione di “variazione lenta” sia ben posta.

In presenza del reticolo il contributo (5.14) può essere invece non trascurabile: lo stato fondamentale all’interno della trappola è infatti caratterizzato da fluttuazioni di densità su piccola scala (vedi fig. 7.2) che fanno aumentare l’energia cinetica assiale e possono rendere apprezzabile, per alte intensità del reticolo, la quantità trascurata. Nonostante questa energia non sia piccola, come vedremo nel capitolo 7 il modello è in grado di descrivere in modo molto accurato sia le proprietà assiali che il profilo medio trasverso su tutto il *range* di parametri studiati.



## Capitolo 6

# Analisi numerica

Le simulazioni presentate in questo lavoro di tesi sono state effettuate utilizzando algoritmi che implementano la risoluzione numerica della GPE, nelle sue varianti unodimensionali presentate nei capp. 4 e 5, per la ricerca dello stato fondamentale di un condensato in una trappola e per lo studio della sua evoluzione in seguito allo spegnimento della trappola.

Il linguaggio di programmazione utilizzato è il Fortran 90, scelto per la semplicità delle sue regole sintattiche e per il gran numero di routine disponibili in letteratura. Rispetto alla versione 77, la 90 presenta una notevole flessibilità per quanto riguarda l'utilizzo di vettori e matrici: al suo interno è infatti in grado di gestire questi come singoli oggetti in operazioni come la moltiplicazione per uno scalare o l'addizione, evitando così lunghi e complessi cicli iterativi. Inoltre la possibile suddivisione dei programmi in moduli interni o esterni ne facilita ulteriormente la scrittura.

Nel presente capitolo verranno descritti i concetti fisici ed i metodi numerici impiegati per scrivere i codici necessari alle simulazioni.

### 6.1 Ricerca dello stato fondamentale

Per quanto riguarda la ricerca dello stato fondamentale all'interno della trappola, si è utilizzata un'evoluzione in tempo immaginario, la cui motivazione fisica può essere spiegata come segue. Si immagini di numerare gli autovettori dell'Hamiltoniana da 0 ad  $\infty$  secondo la loro energia e di scomporre il vettore di stato su questa base:  $|\Psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |\Psi_n\rangle$ ; la sostituzione  $t \mapsto -i\tau$  trasforma  $U(t)$  in  $\tilde{U}(\tau) = e^{-H\tau}$ , operatore non unitario che manda a zero ciascuna componente con una "velocità" proporzionale alla sua energia.

Utilizzando  $\tilde{U}(\tau)$  per effettuare evoluzioni temporali infinitesime, ciascuna seguita da una rinormalizzazione ad 1 del vettore, si otterrà al passare del tempo un vettore la cui energia decresce in modo esponenziale fino ad

assestarsi su quella propria dell'autostato fondamentale  $|\Psi_0\rangle$ :

$$|\Psi(\tau)\rangle \equiv \frac{e^{-H\tau}|\Psi\rangle}{\|e^{-H\tau}|\Psi\rangle\|} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\tau E_n} c_n |\Psi_n\rangle}{\|\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\tau E_n} c_n |\Psi_n\rangle\|} \xrightarrow{(\tau \rightarrow \infty)} |\Psi_0\rangle.$$

Una derivazione alternativa dello stesso metodo è possibile a partire dal funzionale energia del sistema:

$$E[\Psi] = \int d^3\mathbf{r} \Psi^* \left( \frac{\nabla^2}{2} + V + \frac{gN}{2} |\Psi|^2 \right) \Psi \quad (6.1)$$

Se se ne effettua la derivata funzionale rispetto a  $\Psi^*$  si ottiene:

$$\frac{\delta E}{\delta \Psi^*} = \left( -\frac{\nabla^2}{2} + V + gN |\Psi|^2 \right) \Psi \equiv H\Psi.$$

Una trasformazione infinitesima del tipo:

$$\Psi \longrightarrow (I - H\tau)\Psi$$

porta allora il vettore d'onda ad evolvere nel suo spazio dei parametri in direzione opposta a tale gradiente, ovvero verso lo stato a minima energia, lo stato fondamentale; l'operatore trovato è lo sviluppo al prim'ordine di  $\tilde{U}(\tau)$ .

Il metodo sopra sviluppato presenta tuttavia un difetto: durante ciascuna evoluzione, la norma del vettore non è conservata ed è quindi scorretto dal punto di vista fisico effettuare passi temporali troppo lunghi; a ciò può essere posto rimedio introducendo una ridefinizione per la funzione d'onda nella forma:

$$\Psi = \frac{\varphi}{\|\varphi\|};$$

la condizione di normalizzazione  $\|\Psi\| = 1$ , necessaria per l'interpretazione probabilistica della funzione d'onda, sarà così verificata indipendentemente dalle manipolazioni matematiche compiute su  $\varphi$ , ivi comprese operazioni non unitarie che ne modifichino la norma. Avendo effettuato la sostituzione  $\Psi \rightarrow \varphi$  nel funzionale energia (6.1), si ottiene per il suo gradiente:

$$\frac{\delta E}{\delta \varphi^*} = \frac{1}{\|\varphi\|} \left( H - \frac{\langle \varphi | H | \varphi \rangle}{\|\varphi\|^2} \right) \frac{\varphi}{\|\varphi\|} = \frac{1}{\|\varphi\|} (H - \mu) \frac{\varphi}{\|\varphi\|}$$

e quindi per l'evoluzione di  $\varphi$ :

$$\varphi \longrightarrow \left( I - \frac{\delta E}{\delta \varphi^*} \tau \right) \varphi.$$

$\tau$  può ora essere scelto grande a piacere e  $\varphi$  non necessiterebbe in teoria di alcuna rinormalizzazione durante l'evoluzione. Poiché tuttavia l'algoritmo viene poi implementato su calcolatore e  $\varphi$  può assumere valori arbitrariamente grandi o piccoli, è consigliabile rinormalizzare il vettore a ciascun passo per evitare che si sommino nel tempo errori di troncamento.

## 6.2 Fast Fourier Transform ed evoluzione temporale

Come noto, la trasformata di Fourier (FT) può essere utilizzata per trasformare l'operatore di derivazione  $-(\hbar^2/2m)\partial^2$  nel corrispettivo operatore moltiplicativo  $p^2/2m$ ; ad esempio nel caso dell'espansione libera di un gas non interagente l'Hamiltoniana è composta dal solo termine cinetico e la soluzione ad un tempo  $t$  è calcolabile analiticamente:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = [FT^{-1}] e^{-i\mathbf{P}^2 t/2m} ([FT]\Psi(\mathbf{r}, 0)) \quad (6.2)$$

Nei casi più complessi e più comuni, come ad esempio in presenza di potenziali esterni o del termine di autointerazione, l'Hamiltoniana contiene termini non commutanti tra loro e l'esponenziale di evoluzione non può essere fattorizzato. A partire dall'identità di Campbell-Baker-Hausdorff:

$$e^{tA/2} e^{tB} e^{tA/2} = e^{t(A+B)+t^3[B,[B,A]]/12-t^3[A,[A,B]]/24+\dots}$$

nella sua forma troncata:

$$e^{t(A+B)} = e^{tA/2} e^{tB} e^{tA/2} (1 + O(t^3))$$

si ottiene la formula di Trotter-Lie, che permette di sviluppare l'operatore  $U(t)$  come prodotto di esponenziali, ciascuno contenente solo  $T$  o  $V$ :

$$e^{-it(T+V)/\hbar} = e^{+i\tau V/2\hbar} \prod_1^N \left\{ e^{-i\tau V/\hbar} e^{-i\tau T/\hbar} \right\} e^{-i\tau V/2\hbar} (1 + O(\tau^2)) \quad N \rightarrow \infty$$

( $T$  e  $V$  sono rispettivamente le parti cinetica e moltiplicativa dell'Hamiltoniana ed è stata introdotta la variabile  $\tau \equiv t/N$ ).

Introducendo le trasformate di Fourier, si ha per  $U(t)$  la forma finale:

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= U(t)\Psi(0) \approx \\ &\approx e^{+i\tau V/2\hbar} \prod_1^N \left\{ e^{-i\tau V/\hbar} [FT^{-1}] e^{-i\tau T/\hbar} [FT] \right\} e^{-i\tau V/2\hbar} \Psi(0) \end{aligned} \quad (6.3)$$

In tutti i codici scritti è stato fatto largo uso di una subroutine in grado di calcolare la trasformata di Fourier di un vettore; chiamata FFT (acronimo di Fast Fourier Transform), è qui utilizzata nella forma codificata da Cooley e Tukey (per una introduzione all'argomento si veda [NR2nd], cap. 12). Il nome inglese comprende l'aggettivo "fast" in quanto, se eseguita su vettori di lunghezza  $N$  pari a una potenza di 2, implica un numero di operazioni pari a  $N \log_2 N$ , invece delle  $N^2$  necessarie agli algoritmi precedenti.

Nell'algoritmo è stata introdotta una procedura che permette di effettuare un controllo in tempo reale sui parametri del sistema, per verificare che

l'evoluzione proceda in modo regolare: ogni predeterminato numero di evoluzioni temporali infinitesime viene calcolata l'energia (o alternativamente la sua varianza) e, se il valore trovato si discosta troppo in percentuale dal valore precedente (oppure, nel caso dell'evoluzione a tempo immaginario, se l'energia o la sua varianza sono cresciute), il programma riassegna al sistema lo stato che aveva all'inizio del ciclo, diminuendo il valore di  $t/N$ . Se invece il controllo dà esito favorevole, lo stepsize temporale viene aumentato fino al raggiungimento di un valore massimo impostato. Nelle simulazioni effettuate si è in genere tenuto  $2 \mu s < t/N < 5 \mu s$ .

All'interno dei codici sono state utilizzate sempre variabili adimensionali riscalate in termine delle grandezze caratteristiche del potenziale armonico assiale:

$$\begin{cases} \mathbf{r} = a_z \tilde{\mathbf{r}} \\ t = \tilde{t}/\omega_z \\ \mu = \hbar\omega_z \tilde{\mu} \end{cases} \quad (6.4)$$

(le tilde verranno poi soppresse nelle formule contenenti quantità riscalate per facilitarne la lettura).

L'utilizzo delle variabili adimensionali permette una scrittura più trasparente delle formule, in quanto da esse risultano assenti le costanti fisiche fondamentali del problema (quali  $\hbar$  o  $m$ ); l'interazione e la forma del condensato sono regolati rispettivamente dai due parametri adimensionali:

$$\delta \equiv \frac{a_s}{a_z} N \quad (6.5)$$

e

$$\gamma \equiv \omega_{\perp}/\omega_z, \quad (6.6)$$

grazie ai quali si possono esprimere la costante d'interazione:

$$gN \equiv 4\pi\delta \quad (6.7)$$

ed il potenziale chimico 3D in approssimazione di Thomas-Fermi:

$$\mu_{TF} \equiv \frac{1}{2}\gamma \left(15 \frac{\delta}{\sqrt{\gamma}}\right)^{2/5}. \quad (6.8)$$

L'introduzione di grandezze caratteristiche consente inoltre all'elaboratore di trattare numeri che in generale hanno valori comparabili con l'unità invece che con potenze piccolissime, così da ridurre l'importanza degli errori di troncamento.

I dati riportati nei grafici del prossimo capitolo sono comunque tutti espressi in unità dimensionate (solitamente  $\mu\text{m}$  e  $\text{ms}$ ).



### 6.3 Risoluzione delle equazioni per i parametri di scala

I parametri di scala necessari all'*Ansatz* utilizzato nel par. 5.2 soddisfano al sistema (5.2), costituito da tre equazioni differenziali ordinarie di second'ordine; come noto dalla teoria delle equazioni differenziali, ogni equazione ordinaria di second'ordine del tipo

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + q(x)\frac{dy(x)}{dx} + s(x)y(x) = r(x)$$

può essere riscritta come sistema di due equazioni del prim'ordine:

$$\begin{cases} z(x) \equiv \frac{dy(x)}{dx} \\ \frac{dz(x)}{dx} + q(x)z(x) + s(x)y(x) = r(x) \end{cases}$$

e dunque, se si analizza un problema a simmetria cilindrica (nel quale due dei parametri risultano uguali), ci si riduce allo studio di quattro equazioni differenziali ordinarie accoppiate del prim'ordine.

Nel presente caso, il sistema non ammette soluzione analitica e va perciò risolto numericamente (si veda ad esempio [NR2nd], cap. 16): in questa Tesi abbiamo scelto per la risoluzione un'algoritmo di Runge-Kutta del quart'ordine.

Gli algoritmi di Runge-Kutta sono molto semplici da scrivere e sono usualmente efficienti dal punto di vista computazionale quando non sia richiesta una precisione particolarmente elevata ( $\lesssim 10^{-5}$ ). In questo metodo, per ogni passo temporale  $\tau$  vengono calcolate quattro espressioni in punti intermedi: il loro valore viene poi utilizzato per effettuare il salto temporale completo; il metodo è di quart'ordine in quanto permette una precisione dell'ordine di  $o(\tau^4)$ .

È da sottolineare che, ad ogni step temporale, la risoluzione numerica delle eq. (5.2) è effettuata in un tempo assolutamente trascurabile rispetto all'evoluzione della funzione d'onda, che per sua natura coinvolge il calcolo di trasformate di Fourier; l'*Ansatz* introdotto non aumenta dunque in modo significativo la mole computazionale necessaria alla risoluzione.



## Capitolo 7

# Studio dell'espansione da reticolo

In questo capitolo discuteremo l'applicazione della  $dr$ -GPE ad un esperimento particolare, l'espansione di un insieme coerente di condensati, realizzato recentemente al LENS di Firenze [PPS01].

Nella prime due sezioni presentiamo una descrizione delle modalità sperimentali impiegate e del modello utilizzato dagli autori per interpretare i risultati. Nel resto del capitolo paragoniamo i risultati ottenuti tramite l'equazione effettiva unidimensionale  $dr$ -GPE, da noi introdotta nel cap. 5, con i dati sperimentali ed altre teorie, mostrandone il buon accordo su tutta la gamma dei parametri analizzati.

### 7.1 Descrizione dell'esperimento

I condensati di Bose-Einstein sono caratterizzati da una coerenza a lungo *range* che può essere ben evidenziata dall'uso di potenziali periodici: un reticolo ottico unidimensionale ad esempio permette di suddividere la nuvola intrappolata in un insieme ordinato di circa 250 sottosistemi, tra loro spazialmente separati, che tuttavia manifestano una relazione di fase ben definita su tutta la lunghezza dell'oggetto.

L'analisi delle proprietà di coerenza può essere effettuata direttamente sul condensato intrappolato tramite spettroscopia Bragg a 2 fotoni, come realizzato sperimentalmente da Stamper-Kurn *et al.* [SCG99]. Le misure *in situ* sono tuttavia rese difficili dalla limitata estensione spaziale della funzione d'onda del sistema all'interno della trappola (valori tipici dei raggi di Thomas-Fermi sono 30-60  $\mu\text{m}$  nella direzione assiale e 3-6  $\mu\text{m}$  in quella trasversa).

Un'alternativa possibile è lo studio della figura di interferenza visibile in seguito all'espansione libera del sistema: in presenza di un reticolo infatti la distribuzione dei momenti del condensato intrappolato ha una peculia-

re struttura a picchi molto pronunciata, che durante l'evoluzione genera la formazione e il distacco di parti del condensato dal corpo centrale. Nell'esperimento analizzato dopo circa 30 ms queste si trovano a 400  $\mu\text{m}$  dalla loro posizione iniziale e le dimensioni trasverse aumentano di un ordine di grandezza: la tecnica permette dunque una più semplice risoluzione dell'immagine finale e sarà qui di seguito descritta nella sua realizzazione sperimentale.

Un gas di  $^{87}\text{Rb}$  nello stato  $|F = 1, m_F = -1\rangle$  viene raffreddato evaporativamente in una trappola armonica "a sigaro", con l'asse maggiore nel piano orizzontale e frequenze fondamentali di  $\omega_z = 2\pi \times 9$  Hz e  $\omega_\perp = 2\pi \times 92$  Hz, fino a raggiungere una buona percentuale di atomi condensati ( $T \lesssim T_c$ ).

Al potenziale esistente viene poi sovrapposto lungo l'asse  $z$  un fascio laser retroriflesso, di lunghezza d'onda  $\lambda$  e fortemente fuori risonanza. Per valori dell'intensità del reticolo negli antinodi pari a  $I = 3$  mW/mm<sup>2</sup> (corrispondenti a  $s \sim 5$ ), un "blue-detuning" di  $\delta = 2\pi \times 150$  GHz dalla linea  $D_1$  a  $\lambda_0 = 795$  nm assicura uno *scattering rate* da reticolo estremamente ridotto, inferiore a 10 Hz; l'interazione esercitata sul condensato da parte della radiazione incidente è dunque di tipo puramente dispersivo ed è chiamata forza di dipolo; il potenziale completo sentito dal sistema è dato da:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m(\omega_z^2 z^2 + \omega_\perp^2 r_\perp^2) + sE_r \cos^2\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right)$$

In presenza del reticolo viene poi continuato il raffreddamento evaporativo fino a raggiungere temperature ben al di sotto della temperatura critica  $T_c$ . Tipicamente il condensato si divide in circa 250 dischi (con spessore dell'ordine di  $d \equiv \lambda/2 \sim 400$  nm, corrispondente alla distanza fra 2 nodi) contenenti ognuno 100  $\sim$  500 atomi. Una volta raggiunta la temperatura desiderata si spegne il potenziale, si lascia espandere liberamente il sistema per un tempo  $t_{exp}$  e se ne prende una "immagine di assorbimento". La temperatura del sistema intrappolato è tale che, nelle immagini del condensato espanso, sia pressoché invisibile la nuvola termica di forma gaussiana: questo significa che, all'istante iniziale, la frazione condensata è molto vicina all'unità e gli atomi possono essere considerati come tutti provenienti dallo stesso stato fondamentale del potenziale combinato.

Nello spazio dei momenti il sistema è approssimativamente descritto da un insieme periodico e coerente di condensati identici, allineati lungo l'asse  $z$ ; il suo parametro d'ordine ha la forma:

$$\begin{aligned} \Psi(p_z) &= \Psi_0(p_z) \sum_{k=0, \pm 1, \dots, \pm k_M} e^{\frac{ikp_z d}{\hbar}} \\ &= \Psi_0(p_z) \frac{\sin[(2k_M + 1)p_z d/2\hbar]}{\sin(p_z d/2\hbar)} \end{aligned}$$

dove  $k$  identifica i differenti siti,  $(2k_M + 1)$  è il numero totale di siti e  $|\Psi_0(p_z)|^2$  è la distribuzione nei momenti di ciascun condensato.



Figura 7.1: Immagine di assorbimento che mostra una catena lineare di condensati dopo l'espansione ( $s = 5$ ,  $N = 2 \times 10^4$ ,  $t_{exp} = 29.5$  ms). Figura tratta da [PPS01].

La distribuzione dei momenti dell'intero sistema corrisponde al campo prodotto nel *far field* da un fascio piano diffratto da un reticolo, ovvero la classica figura di interferenza e diffrazione, composta da diversi ordini di picchi molto stretti per i valori  $p_z = n \cdot 2\pi\hbar/d$  con  $n$  intero e intensità modulata da  $|\Psi_0(p_z)|^2$  (vedi fig. 7.7).

Il picco centrale ha  $\langle P_z \rangle = 0$  e  $\Delta P_z \sim \hbar/R_z$  (dove  $R_z \sim k_M d$  corrisponde a metà dell'estensione assiale del sistema) e ci si attende dunque che la sua espansione allo spegnimento della trappola sia molto lenta. I picchi con  $n \neq 0$  hanno invece  $|\langle P_z \rangle| \gg 0$  e il loro centro di massa traslerà rapidamente secondo la legge asintotica:

$$z(t) = n \frac{2\pi\hbar}{dm} t.$$

Nelle figure di espansione 7.8 si vede effettivamente, dopo un breve transiente, il distacco dei picchi laterali dal corpo centrale e la loro traslazione a velocità costante: mentre nelle immagini sperimentali (cfr. fig. 7.1) è usualmente distinguibile solo il primo ordine, i grafici ottenuti dalle simulazioni numeriche, se visualizzati in scala logaritmica, mostrano la presenza di almeno 4 ordini (vedi fig. 7.14).

## 7.2 Modello originale

Gli autori forniscono nell'articolo sopracitato un modello completo per l'interpretazione dei risultati; essi assumono che lo stato fondamentale possa

essere scritto nella forma fattorizzata:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{k=0, \pm 1, \dots, k_M} e^{-(z-kd)^2/2\sigma^2} \phi_k(\mathbf{r}_\perp);$$

la parte assiale è composta da  $(2k_M + 1)$  gaussiane tutte uguali, spaziate di una distanza  $d = \lambda_{opt}/2$  e la cui larghezza  $\sigma$  è calcolata numericamente minimizzando l'energia<sup>1</sup>. In ciascuna buca la parte radiale è stata scelta nella forma di Thomas-Fermi:

$$|\phi_k(\mathbf{r}_\perp)|^2 = \frac{\sqrt{2}}{g} \mu_k \left( 1 - \frac{r_\perp^2}{(R_\perp)_k^2} \right),$$

con potenziale chimico  $\mu_k \equiv \frac{1}{2} m \omega_x^2 d^2 (k_M^2 - k^2)$  e raggio  $(R_\perp)_k = \sqrt{2\mu_k / m \omega_\perp^2}$  dipendenti da  $k$ . Il valore di  $k_M$  determina il numero di buche occupate dal condensato e può essere trovato imponendo la normalizzazione della funzione d'onda  $N = \sum N_k$ ; dall'espressione:

$$\begin{aligned} N_k &= \int d^3 \mathbf{r} e^{-(z-kd)^2/2\sigma^2} \phi_k(\mathbf{r}_\perp) = \frac{\sqrt{2}}{16} \frac{\sigma}{a_s} \left( \frac{m \omega_z^2 d^2 k_M^2}{\hbar \omega_\perp} \right)^2 \left( 1 - \frac{k^2}{k_M^2} \right)^2 = \\ &= N_0 \left( 1 - \frac{k^2}{k_M^2} \right)^2 \end{aligned}$$

trascurando la piccola sovrapposizione delle gaussiane adiacenti si ottiene:

$$k_M = \sqrt{\frac{2\hbar\bar{\omega}}{m\omega_z^2 d^2}} \sqrt[5]{\frac{15}{8\sqrt{\pi}} N \frac{a}{a_\omega} \frac{d}{\sigma}}$$

(dove  $a_\omega \equiv \sqrt{\hbar/m\bar{\omega}}$  e  $\bar{\omega}$  è la media geometrica delle frequenze) e quindi  $N_0 = (15/16)N/k_M$ .

Da questo modello 3D essi ne hanno estratto una versione unidimensionale usata per descrivere l'espansione assiale, in cui lo stato fondamentale è scritto come una somma di gaussiane equispaziate, di larghezza  $\sigma$  e modulate in intensità dal fattore  $N_k$  ricavato sopra. L'evoluzione di questo stato è poi studiata nell'articolo con l'equazione per un gas ideale, ovvero quella di Schrödinger. Questa approssimazione è giustificata dal fatto che, nell'intervallo di parametri studiati, vale la condizione  $\mu_k \ll \hbar\bar{\omega}_z$  ( $\bar{\omega}_z$  è la frequenza dell'oscillatore armonico che meglio approssima il reticolo nei suoi minimi); l'effetto del reticolo è infatti quello di far aumentare in modo considerevole le energie cinetiche e potenziali dei singoli condensati, senza far variare apprezzabilmente la loro autointerazione: se il reticolo perturba in maniera sostanziale il potenziale armonico ( $s \gtrsim 3$ ), l'energia di autointerazione diventa trascurabile e l'evoluzione può essere ben descritta dall'equazione di Schrödinger.

<sup>1</sup>I valori forniti sono:  $\sigma/d = 0.30, 0.27$  e  $0.25$  rispettivamente per  $s = 3, 4$  e  $5$ .

Per quanto riguarda l'evoluzione trasversa del sistema è stata provata la validità della legge asintotica:

$$R_{\perp}(t) = R_{\perp}(0)\omega_{\perp}t, \quad (7.1)$$

ricavata da Castin e Dum [CD96] nel limite di condensato a forma di sigaro (cfr. eq. (5.5) ).

Il raggio iniziale è stato scelto pari a

$$R_{\perp}(0) \sim (R_{\perp})_{k=0} = k_M d\omega_z / \omega_{\perp} \quad (7.2)$$

e il risultato è stato confrontato con i dati sperimentali ottenuti nell'esperimento realizzato al LENS.

La teoria appena esposta risulta in ottimo accordo con i dati presentati, nonostante la semplicità del modello. Il limite di questa trattazione sta tuttavia nel fatto che essa non può essere applicata per reticoli troppo deboli: in tale caso infatti l'energia di autointerazione non risulta trascurabile e l'equazione di Schrödinger non è più adatta alla descrizione del sistema. Inoltre la presenza del reticolo è fondamentale per la coerenza logica del ragionamento: nel limite  $\lambda \rightarrow \infty$  si prevede infatti per  $k_M$  un valore nullo.

La teoria sviluppata nel cap. 5 invece contiene il termine di densità e la sua derivazione non è intrinsecamente legata alla presenza del reticolo: essa è quindi utile per studiare generici potenziali assiali e, nel caso particolare di reticolo ottico 1D, i suoi effetti sul sistema possono essere studiati per valori di  $s$  e  $1/\lambda$  variabili con continuità a partire da 0.

### 7.3 Applicazione della $dr$ -GPE a condensati in reticoli

Nella presente sezione analizzeremo, in presenza del potenziale combinato armonico e reticolare, le proprietà dello stato fondamentale e della sua successiva evoluzione, così come descritte dalla  $dr$ -GPE: in particolare studieremo in dettaglio le proprietà trasverse del sistema, che finora non sono state ancora messe in luce.

#### 7.3.1 Stato fondamentale

Per verificare l'accuratezza del modello in presenza di un potenziale periodico abbiamo scelto per il reticolo ottico una lunghezza d'onda  $\lambda = 795$  nm, in modo da poter poi confrontare i risultati generati dalla successiva espansione con quelli ottenuti nell'esperimento realizzato al LENS.

Notiamo che nel caso specifico i singoli condensati intrappolati hanno dimensioni inferiori alle capacità di risoluzione ottica degli strumenti e questo non permette una comparazione dei risultati del nostro modello direttamente con gli esperimenti: le previsioni estratte dalla  $dr$ -GPE in questa sezione potranno quindi essere confrontate solo con quelle di altre teorie, quali quella completa 3D, risolta numericamente o analiticamente in approssimazione di Thomas-Fermi, o quella di Pedri *et al.* precedentemente descritta.

Al variare del numero di atomi o del parametro  $s$ , che identifica l'intensità del reticolo ottico, abbiamo studiato nello stato fondamentale della trappola le seguenti caratteristiche:

- il profilo assiale,
- il profilo radiale,
- il raggio trasverso quadratico medio,
- la distribuzione dei momenti.

Il profilo di densità assiale  $\rho(z)$ , ottenuto integrando la densità sulle coordinate radiali ( $\rho(z) \equiv \int 2\pi r dr |\Psi(\mathbf{r})|^2$ ), è stato confrontato con quello ricavato da una simulazione 3D (fig. 7.2): anche per grandi valori dell'intensità reticolare l'ampiezza delle oscillazioni risulta in ottimo accordo in tutta la zona centrale della trappola; nella rimanente parte, dove la densità massima scende sotto il 5% del valore centrale, la simulazione 1D mostra una coda leggermente più pronunciata, all'interno della quale si distinguono circa 15 dischi in più (su un totale di 250); questa discordanza genera comunque un errore trascurabile, in quanto la popolazione media di tali dischi è molto bassa e non altera dunque in modo significativo la quantità  $\sqrt{\langle Z^2 \rangle}$ , che contraddistingue l'estensione assiale del condensato. Per quanto riguarda la frequenza delle oscillazioni, questa è fissata in modo molto netto dal carattere



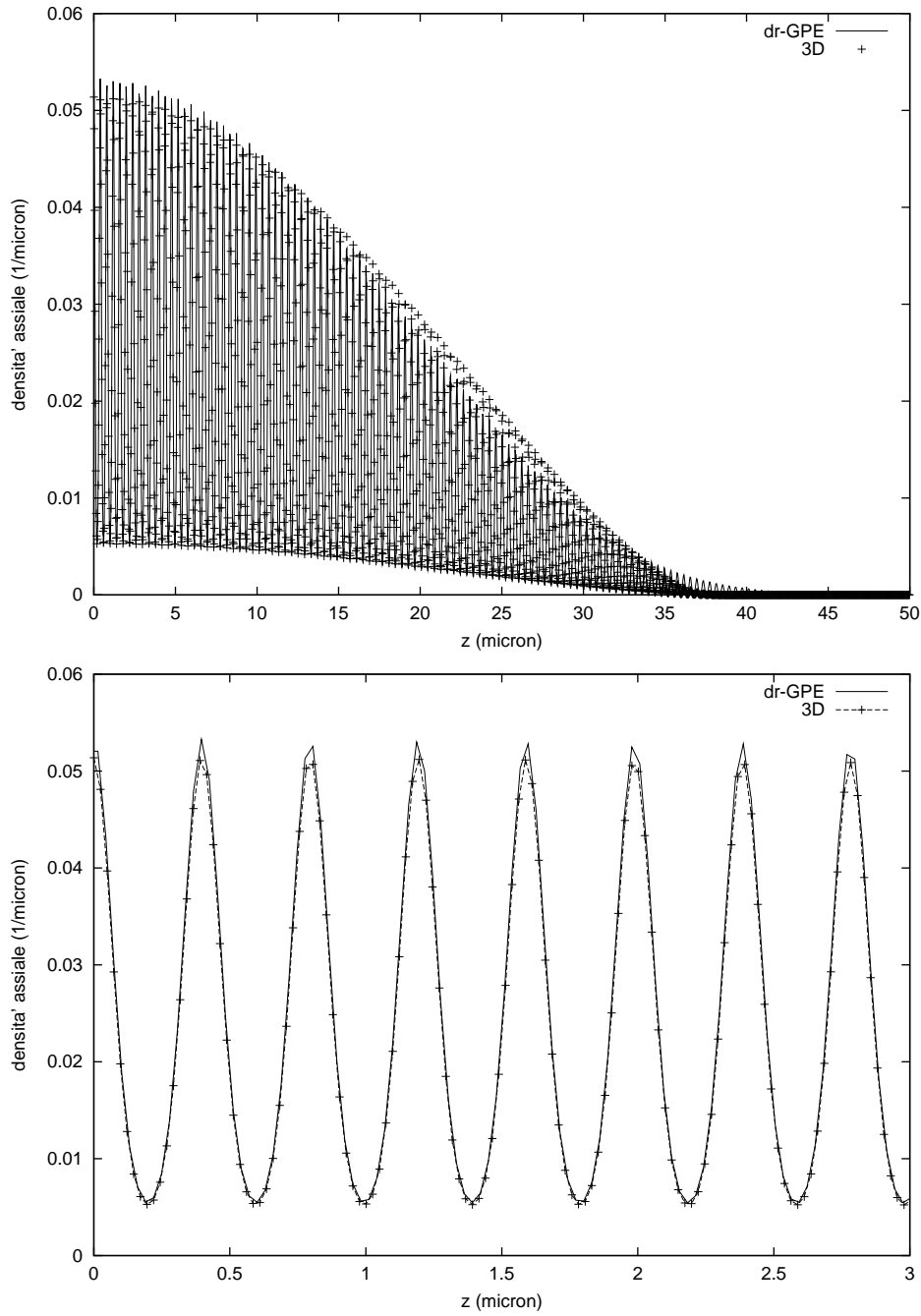


Figura 7.2: Densità assiale del condensato, integrata sulle direzioni radiali ( $\rho(z) \equiv \int 2\pi r dr |\Psi(\mathbf{r})|^2$ ,  $N = 5 \times 10^4$ ,  $s = 5$ ).

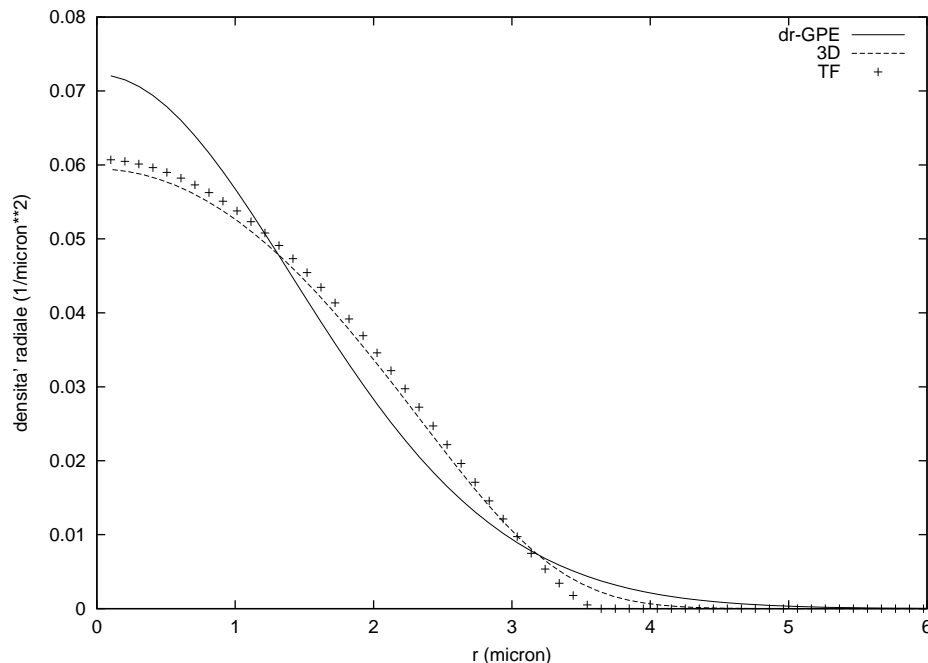


Figura 7.3: Densità radiale  $\rho_{y=0}(x)$  in assenza di reticolo, ottenuta misurando lungo uno degli assi minori e integrando sulla coordinata assiale ( $N = 5 \times 10^4$ ): sono riportati i dati ottenuti dalla soluzione della  $dr$ -GPE, del modello 3D completo e della sua approssimazione TF.

sinusoidale del potenziale: è dunque attesa (e verificata) una corrispondenza esatta tra la frequenza del laser e quella dei profili calcolati.

Le dimensioni trasverse possono essere studiate attraverso la funzione:

$$\rho_{y=0}(x) \equiv \int dz |\Psi(x, 0, z)|^2,$$

paragonabile direttamente ad una immagine di assorbimento del condensato intrappolato scattata lungo l'asse maggiore<sup>2</sup>.

In fig. 7.3 riportiamo, in assenza di reticolo, un confronto di questo profilo con quelli ottenuti dal modello 3D e dalla funzione d'onda di Thomas-Fermi: l'immagine mostra l'ottimo accordo tra gli ultimi due<sup>3</sup> e mette in luce che la NPSE è in grado di prevedere con ottima approssimazione l'ampiezza trasversa, ma la forma gaussiana tende a sopravvalutare la densità nel centro della trappola.

<sup>2</sup>Si ricorda che tale fotografia è difficilmente realizzabile all'interno della trappola date le piccole dimensioni del condensato prima dell'espansione.

<sup>3</sup>L'accordo del profilo 3D con il profilo di Thomas-Fermi è atteso in quanto per il parametro adimensionale di interazione in queste condizioni si ha:  $Na_s/a_{\bar{\omega}} = 159 \gg 1$

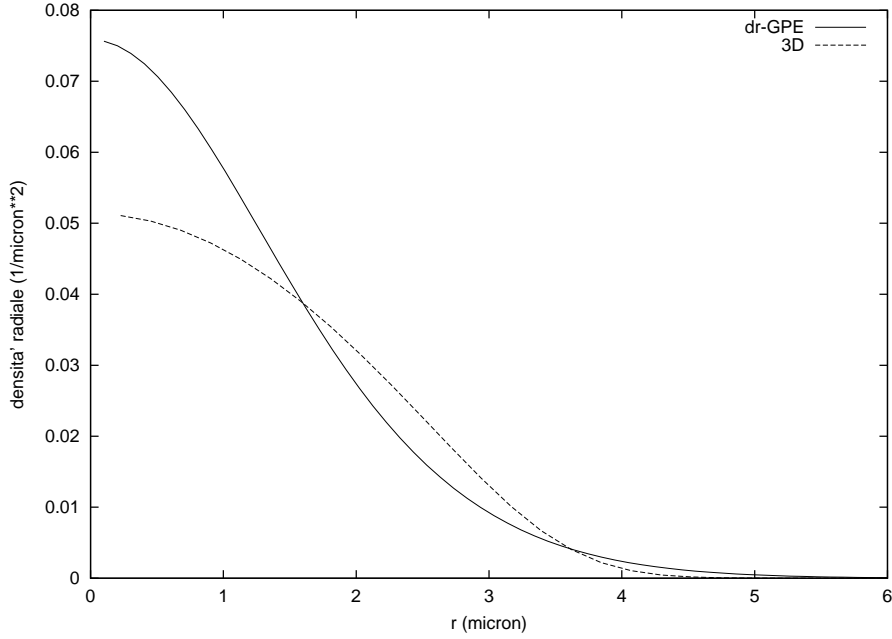


Figura 7.4: Densità radiale  $\rho_{y=0}(x)$  in presenza di reticolo ( $N = 5 \times 10^4$ ,  $s = 5$ ).

In presenza di reticolo, il confronto con una funzione di Thomas-Fermi perde di significato, in quanto l'approssimazione è basata sulla piccola energia cinetica associata al condensato, circostanza non verificata per  $s \neq 0$ . Possiamo allora paragonare i due profili  $\rho_{y=0}(x)$  ottenuti dal modello 1D e da quello completo (vedi fig. 7.4): come nel grafico precedente, si può notare che il profilo gaussiano ben stima le dimensioni medie ma sovrastima parzialmente l'altezza della curva di densità.

Come ultima verifica sulla parte trasversa abbiamo considerato una quantità che dia un'idea dell'estensione media del condensato nelle direzioni radiali, esprimibile come:

$$\sqrt{\langle R_{\perp}^2(z) \rangle} \equiv \sqrt{\int 2\pi r \, dr \, |r|^2 \, |\Psi(\mathbf{r})|^2},$$

il cui integrale sulla dimensione assiale restituisce il raggio trasverso quadratico medio  $\sqrt{\langle R_{\perp}^2 \rangle}$ .

Per  $s=5$ , mostriamo in fig. 7.5 i valori di  $\sqrt{\langle R_{\perp}^2(z) \rangle}$  calcolati tramite la  $dr$ -GPE, a confronto con il calcolo 3D: il risultato evidenzia che la teoria 1D riesce a cogliere in modo molto soddisfacente le proprietà medie trasverse del sistema.

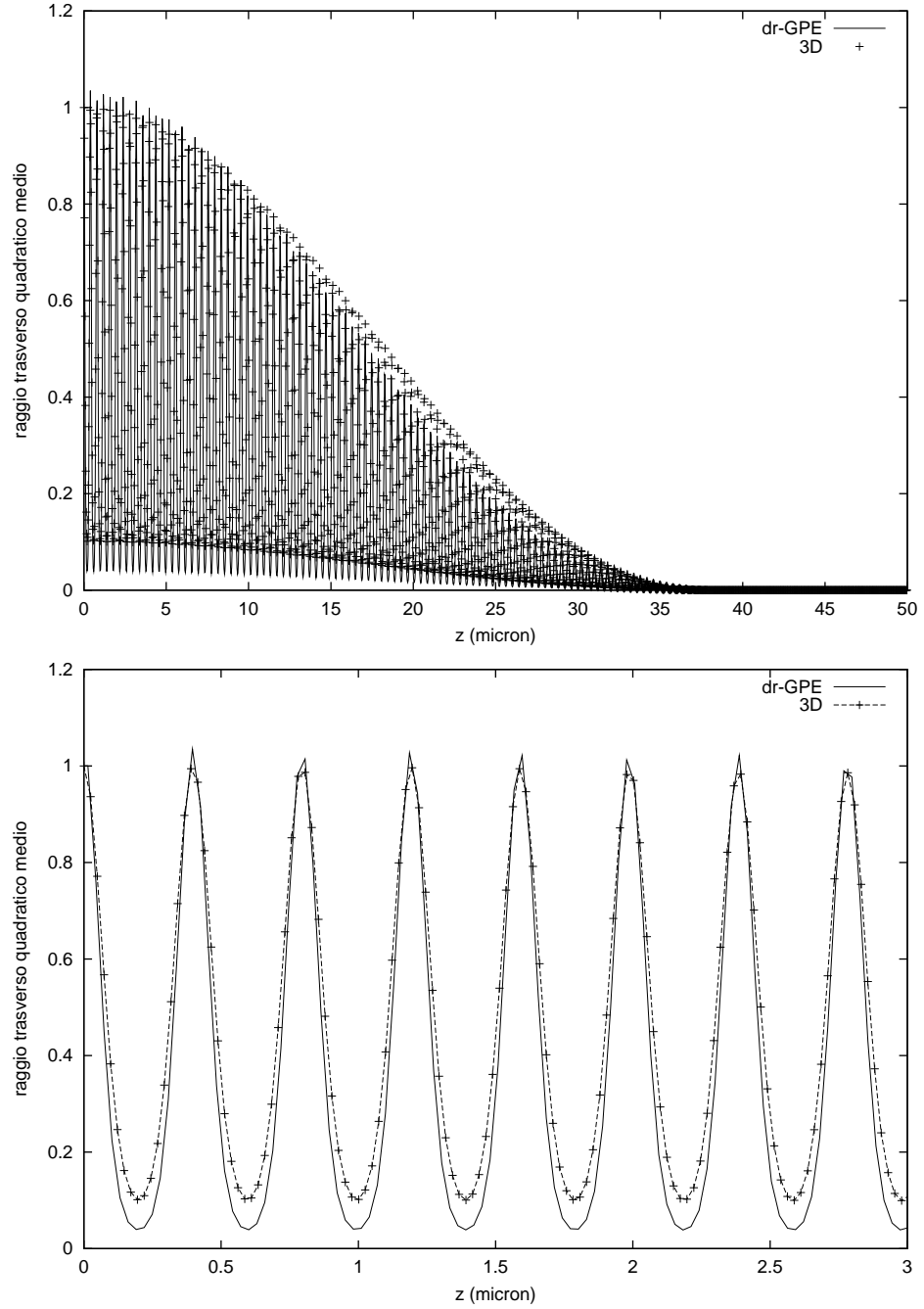


Figura 7.5: Raggio trasverso quadratico medio  $\sqrt{\langle R_{\perp}^2(z) \rangle}$  in funzione della coordinata assiale, normalizzato al suo valore in  $z=0$  ( $N = 5 \times 10^4$ ,  $s = 5$ ).

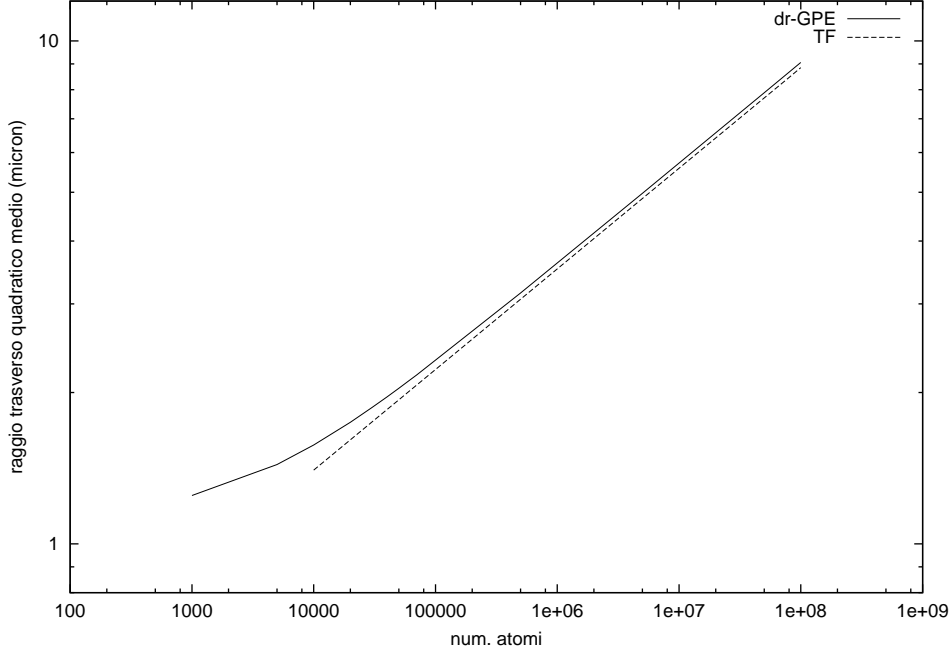


Figura 7.6: Valori del raggio trasverso quadratico medio, calcolati in assenza del reticolo in funzione del numero di atomi.

Poichè le simulazioni 3D sono molto gravose dal punto di vista computazionale, limiteremo i confronti successivi al paragone con modelli teorici approssimati.

In assenza di reticolo, al variare del numero di atomi è possibile effettuare un confronto con una funzione d'onda 3D nel limite di Thomas-Fermi, per la quale  $\sqrt{\langle R_{\perp}^2 \rangle}$  è ricavabile in maniera analitica<sup>4</sup>.

Nell'appendice D è riportato il calcolo del raggio trasverso quadratico medio per una distribuzione a parabola invertita; l'espressione (D.1) ricavata:

$$\sqrt{\langle R_{\perp}^2 \rangle_{TF}} = \sqrt{\frac{2}{7}} R_{TF}(z=0)$$

comporta una relazione lineare fra la quantità in esame e  $R_{TF}$  (il cui valore teorico è dato da  $\sqrt{2\mu/m\omega_z^2}$ ), e quindi  $\sqrt{\langle R_{\perp}^2 \rangle_{TF}} \propto N^{1/5}$ .

Dalla figura 7.6 si nota che l'accordo con il valore teorico migliora all'aumentare del numero di atomi, passando da uno scarto del 5% per  $N = 5 \times 10^4$

<sup>4</sup>Nell'esperimento considerato si ha  $a_s/a_{\bar{\omega}} = 3.19 \times 10^{-3}$  e quindi la condizione  $Na_s/a_{\bar{\omega}} \gg 1$  per la validità dell'approssimazione di Thomas-Fermi [DGPS99] è verificata per  $N \gg 10^3$ .

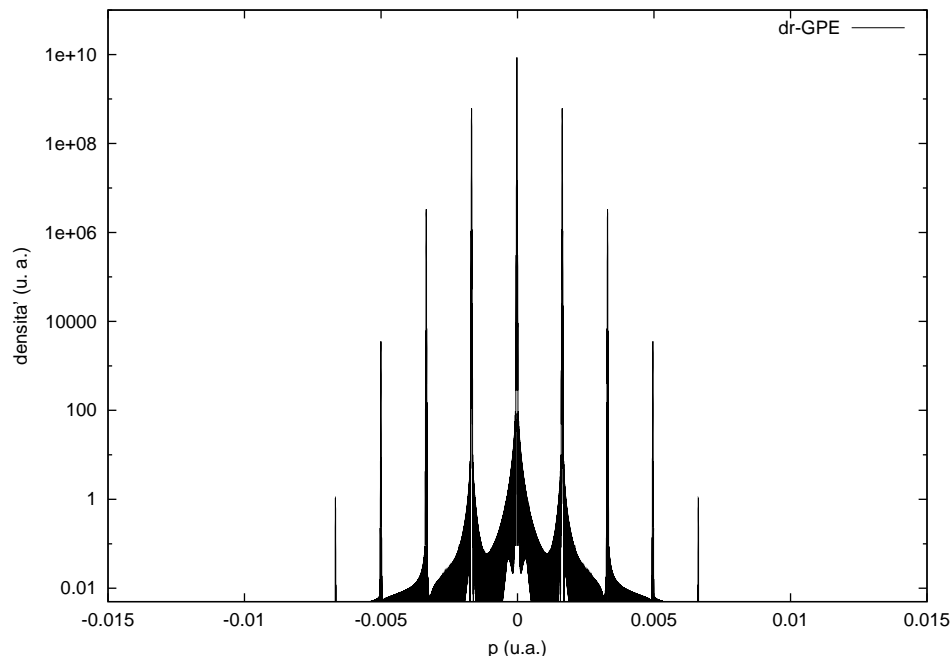


Figura 7.7: Densità nello spazio dei momenti in direzione assiale di un condensato intrappolato in presenza di un reticolo ottico ( $N = 5 \times 10^4$ ,  $s = 5$ ).

ad uno del 2.4% per  $N = 1 \times 10^8$  (valore per il quale la densità di Thomas-Fermi è indistinguibile da quella reale [DGPS99]); poichè la forma trasversa gaussiana è esatta solo nel caso di gas perfetto, ma non in generale per un gas interagente (per il quale si sa che nel limite  $Na_s/a_{\bar{\omega}} \gg 1$  la forma è una parabola invertita), ci si aspetterebbe che l'ipotesi iniziale fosse un'approssimazione tanto peggiore quanto maggiore è il numero di atomi: sorprende dunque l'ottima concordanza di questa grandezza per grande numero di atomi.

In presenza di reticolo l'approssimazione di Thomas-Fermi non risulta più applicabile a causa della grande energia cinetica del sistema; un confronto sul raggio quadratico medio trasverso è comunque possibile con il valore teorico (7.2); la discussione di questo punto è rimandata al prossimo paragrafo.

Le ultime considerazioni portano a concludere che il procedimento variazionale utilizzato per trovare la larghezza radiale restituisce effettivamente il valore di  $\sigma$  che meglio approssima la configurazione esatta, compatibilmente con la condizione al contorno di forma trasversa gaussiana.

Riportiamo infine in fig. 7.7 un'immagine rappresentativa della distribuzione dei momenti del condensato intrappolato: sono ben visibili, in scala lo-

garitmica, i diversi ordini di picchi che compongono la trasformata di Fourier della funzione d'onda.

### 7.3.2 Espansione libera

Nel caso di espansione libera le equazioni per i parametri  $\lambda$  non corrispondono più all'identità e quindi l'evoluzione prevista dal nostro modello si discosta da quella predetta dal modello basato sulla NPSE.

Come visto precedentemente, in presenza di reticolo il profilo di densità assiale del condensato in espansione contiene una serie di coppie di picchi laterali in moto rettilineo uniforme, ciascuna avente una velocità:

$$v_z(t) = \pm n \frac{4\pi\hbar}{\lambda m}$$

(dove  $n$  indica l'ordine del picco).

Dal corpo centrale, il cui centro di massa resta fermo durante l'evoluzione, i picchi nascono in seguito ad una fase transiente, caratterizzata da fluttuazioni irregolari della densità; la loro popolazione, proporzionale all'altezza dei picchi presentata dalla distribuzione dei momenti iniziale, è tanto più grande quanto maggiore è l'intensità del potenziale periodico iniziale.

Nella serie di figure 7.8 riportiamo una sequenza di immagini, prese ad istanti successivi, che mostrano la fase transiente e la successiva espansione dei picchi. La velocità calcolata dalle simulazioni per il picco con  $n=1$  è di  $11.6 \mu\text{m/ms}$ , in ottimo accordo con il valore teorico di  $11.55 \mu\text{m/ms}$ .

L'immagine 7.9 contiene un plot con curve di livello che mostra la densità del condensato nel piano  $y = 0$  alla fine dell'espansione, mentre in fig. 7.10 mostriamo il notevole accordo ottenuto dal nostro modello con i risultati sperimentali ricavati al LENS. L'allargamento alla base del picco centrale è dovuto alla frazione termica ed ovviamente non può essere previsto dal nostro modello, basato sull'equazione di Gross-Pitaevskii: come visto nel capitolo 2, essa è infatti ricavata a temperatura nulla e non è in grado di descrivere gli atomi esterni al condensato. L'interazione con la parte termica gioca comunque un ruolo del tutto trascurabile nella dinamica di questo esperimento.

Nella fig. 7.11 invece riportiamo la popolazione relativa di uno dei picchi con  $n=1$  rispetto a quella del picco centrale, rispettivamente come calcolata dal nostro modello, misurata al LENS e ricavata in [PPS01]. Si può notare il buon accordo mostrato da ambedue le teorie con l'andamento sperimentale: rispetto all'altro modello presentato, quello qui analizzato permette inoltre di indagare il comportamento del sistema per valori di  $s$  variabili con continuità a partire da 0.

Un gas perfetto, la cui distribuzione dei momenti sia composta da picchi molto stretti, asintoticamente evolverà creando copie identiche dell'oggetto originario. La natura repulsiva ( $a_s > 0$ ) delle interazioni nel rubidio fa sì

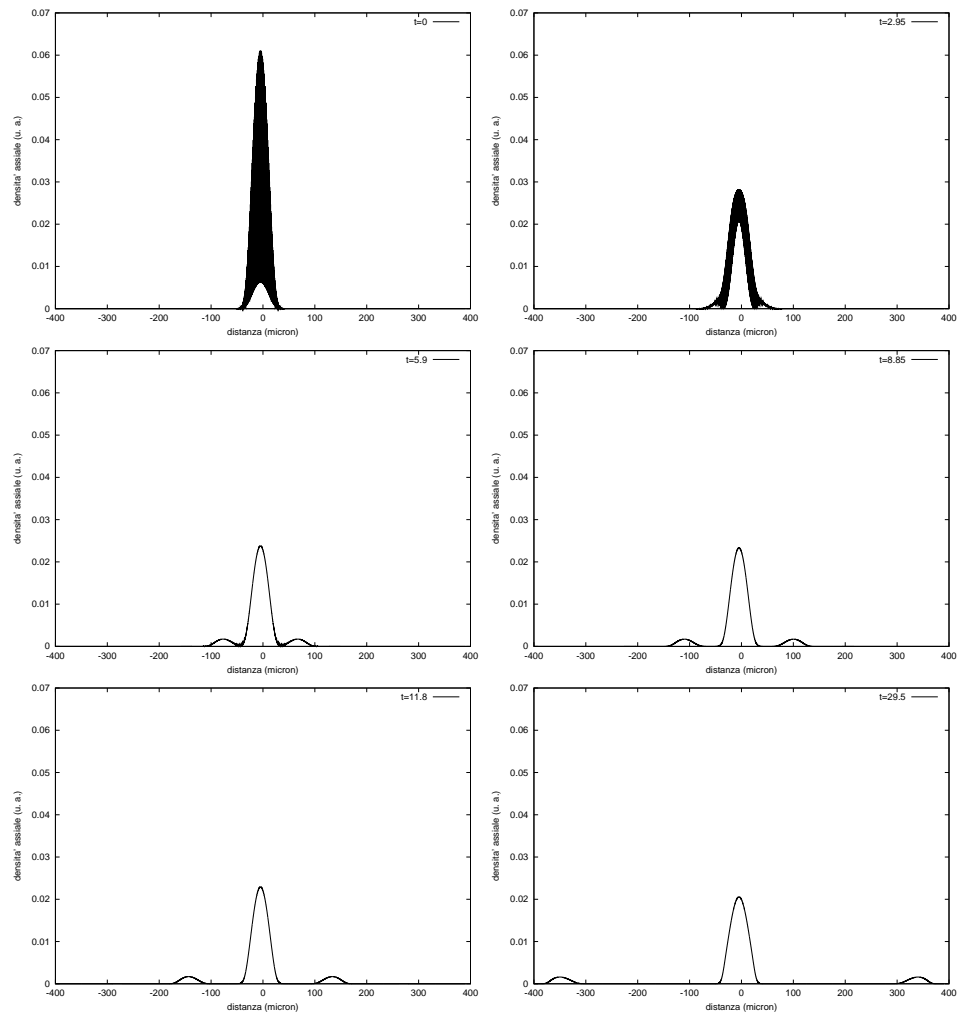


Figura 7.8: Espansione della catena di condensati per un insieme di  $2 \times 10^4$  atomi, inizialmente intrappolati in un reticolo con intensità  $s=5$ ; le immagini sono prese, da sinistra a destra e dall'alto al basso, dopo un tempo di espansione pari a 0, 2.95, 5.9, 8.85, 11.8 e 29.5 ms.



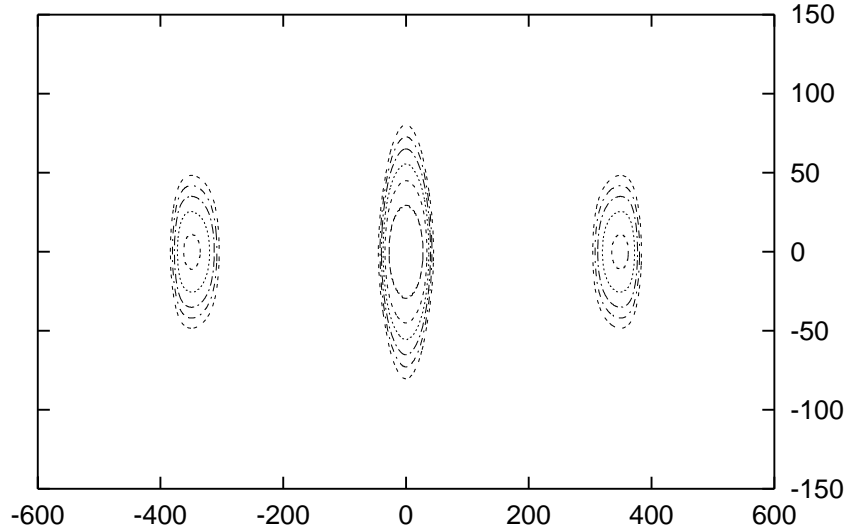


Figura 7.9: Catena lineare di condensati dopo l’espansione: curve di livello per la densità sul piano  $y=0$ , così come ricavate dalla  $dr$ -GPE ( $N = 2 \times 10^4$ ,  $t_{exp} = 29.5$  ms, coordinate assiali e radiali in  $\mu\text{m}$ ).

che, durante l’uscita dei picchi dal corpo centrale, la forma a paraboloide invertito di questi ultimi venga parzialmente modificata, comportando un’avanzamento del centro di massa del pacchetto nella direzione del loro moto e quindi una deformazione del picco.

Questo fenomeno è visibile in fig. 7.12, dove riportiamo l’immagine di un picco dopo l’espansione, così come ottenuta dal nostro modello, dal modello presentato nel par. 4.2 e da un’evoluzione di Schrödinger<sup>5</sup>. Come si può notare dall’immagine, il picco ottenuto dall’evoluzione di un gas non interagente ha una forma simmetrica, mentre gli altri due profili teorici mostrano la deformazione suddetta<sup>6</sup>; il carattere cubico dell’eq. (4.8) rende la forma del profilo più sbalzata verso l’esterno, se paragonata a quella generata dal nostro modello, che come visto nel par. 4.3 presenta un carattere “intermedio” (l’equazione passa da cubica nel caso di piccola interazione a quadratica nel caso di forte interazione).

Lo stesso confronto, effettuato in fig. 7.13 sul picco centrale, mette in luce il fenomeno puntualizzato alla fine del par. 4.2: la funzione d’onda go-

<sup>5</sup>Per quest’ultima si è utilizzata la formula (6.2).

<sup>6</sup>Il profilo derivato dalla  $\mu$ -GPE presenta delle oscillazioni dovute ad *aliasing*, ovvero alla bassa frequenza di campionamento scelta per eseguire la simulazione (vedi [NR2nd], cap. 12); esse sarebbero assenti se, per descrivere la funzione d’onda, avessimo scelto un reticolo con un numero di punti maggiore.

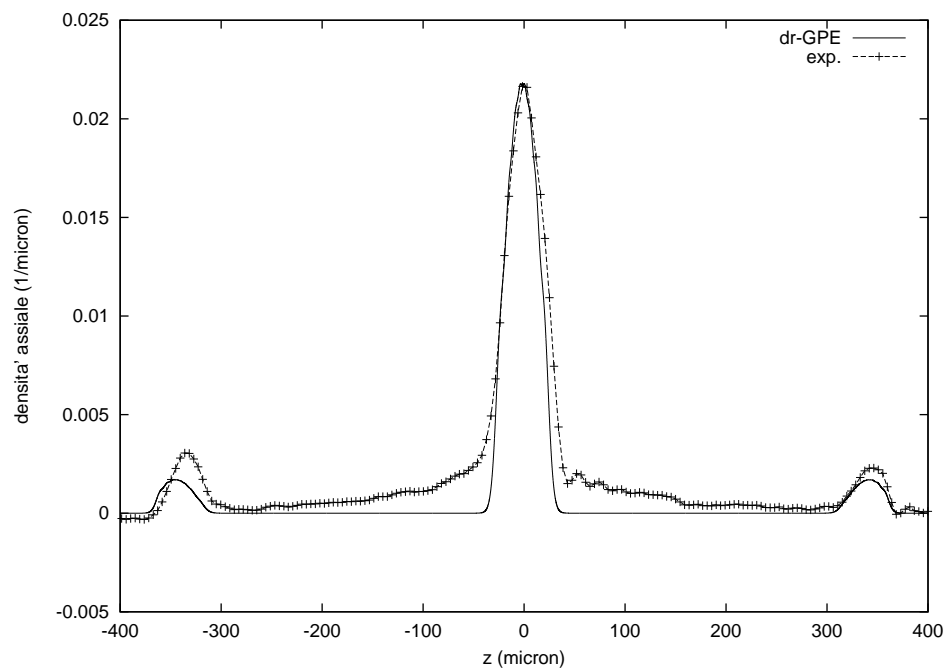


Figura 7.10: Catena lineare di condensati dopo l'espansione: ai dati sperimentali ricavati al LENS sovrapponiamo la previsione data dalla *dr*-GPE ( $N = 2 \times 10^4$ ,  $t_{exp} = 29.5$  ms). Nella distribuzione sperimentale, alla base del picco centrale, si può notare l'allargamento dovuto alla frazione non condensata.

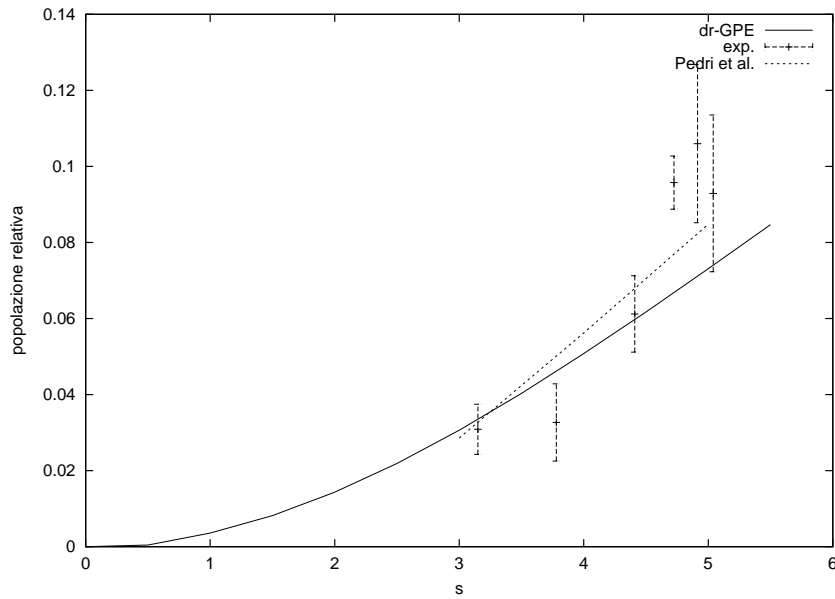


Figura 7.11: Popolazione relativa del picco con  $n=1$  rispetto al picco centrale, in funzione dell'intensità del reticolo ( $N = 2 \times 10^4$ ,  $t_{exp} = 29.5$  ms). Dati sperimentali tratti da [PPS01].

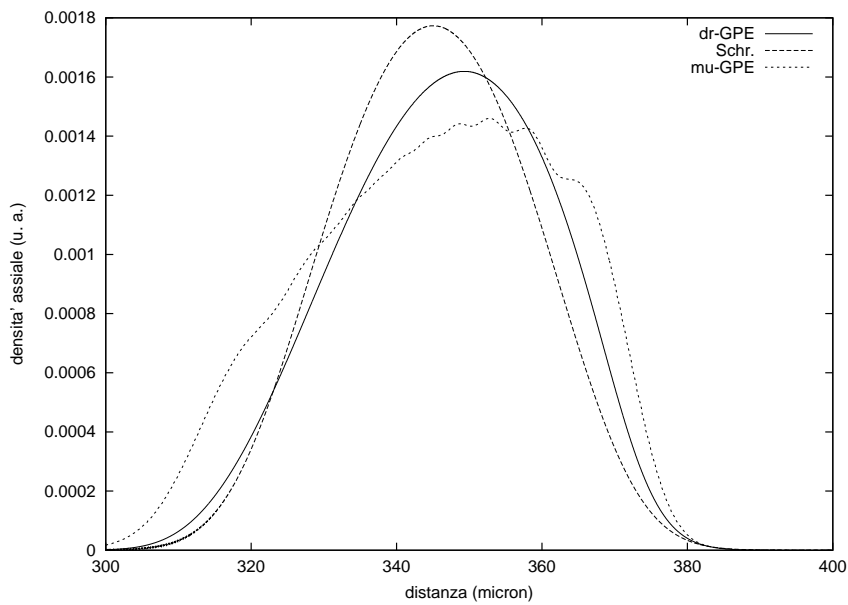


Figura 7.12: Ingrandimento del primo picco di destra ( $N = 2 \times 10^4$ ,  $s = 5$ ,  $t_{exp} = 29.5$  ms).

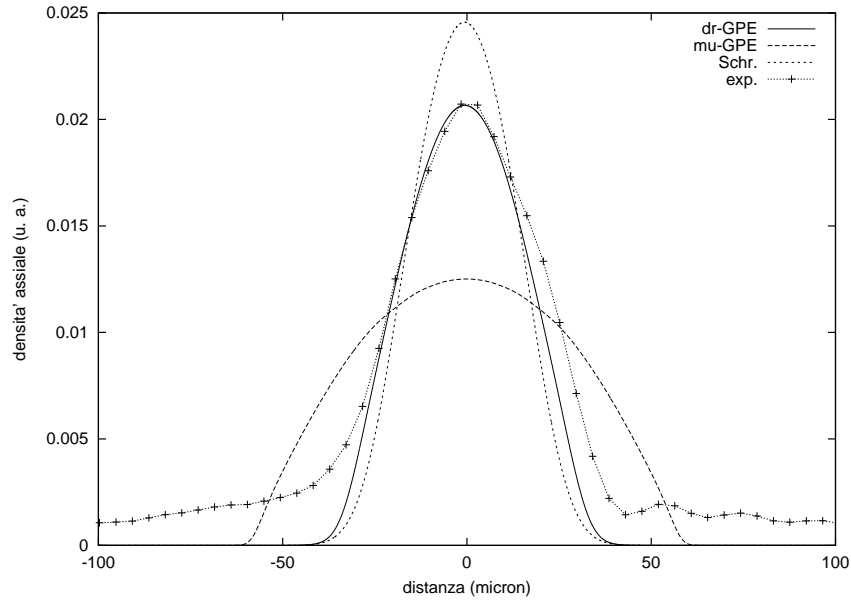


Figura 7.13: Ingrandimento del picco centrale ( $N = 2 \times 10^4$ ,  $s = 5$ ,  $t_{exp} = 29.5$  ms).

vernata dall'equazione di Gross-Pitaevskii 1D presenta un'espansione troppo pronunciata delle dimensioni radiali.

Gli ordini successivi, contraddistinti da  $n > 1$ , hanno una popolazione troppo piccola per essere visibili nelle immagini sopra riportate; l'utilizzo di una scala logaritmica permette tuttavia di visualizzare distintamente la presenza di vari altri ordini (cfr. fig. 7.14).

Il raggio quadratico medio trasverso del picco centrale è stato calcolato al trascorrere del tempo di espansione libera e riportiamo i valori in fig. 7.15, paragonandoli a quelli ottenuti nell'esperimento al LENS ed a quelli teorici riportati in [PPS01]: anche in questo caso ambedue le teorie sono in buon accordo con l'esperimento.

Come visto in questo capitolo il modello introdotto nella presente Tesi, nonostante le approssimazioni effettuate per arrivare ad una equazione unidimensionale, è in grado di cogliere le caratteristiche salienti dell'esperimento analizzato sia nelle sue proprietà radiali che in quelle assiali.

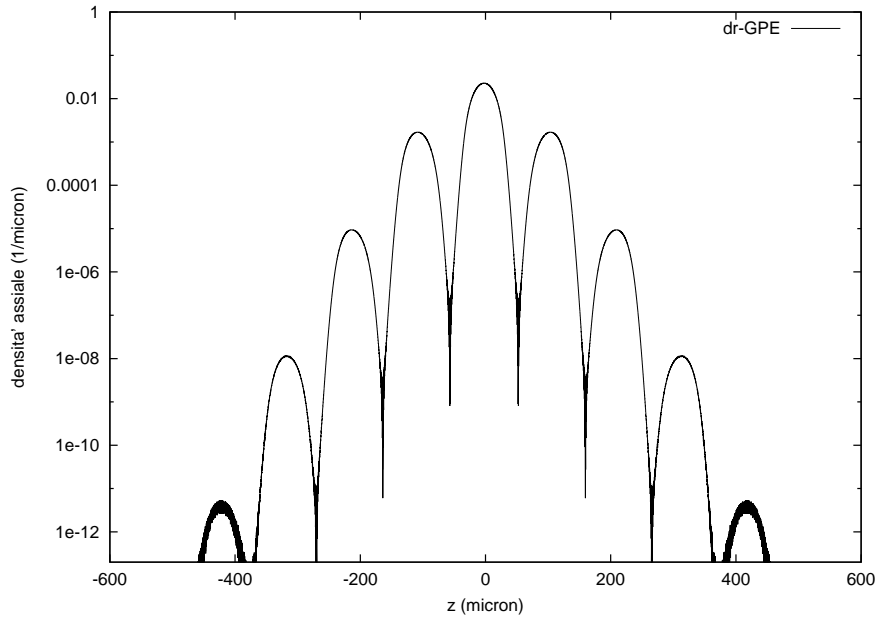


Figura 7.14: Densità assiale del condensato espanso visualizzata in scala logaritmica ( $N = 2 \times 10^4$ ,  $s = 5$ ,  $t_{exp} = 8.85$  ms).

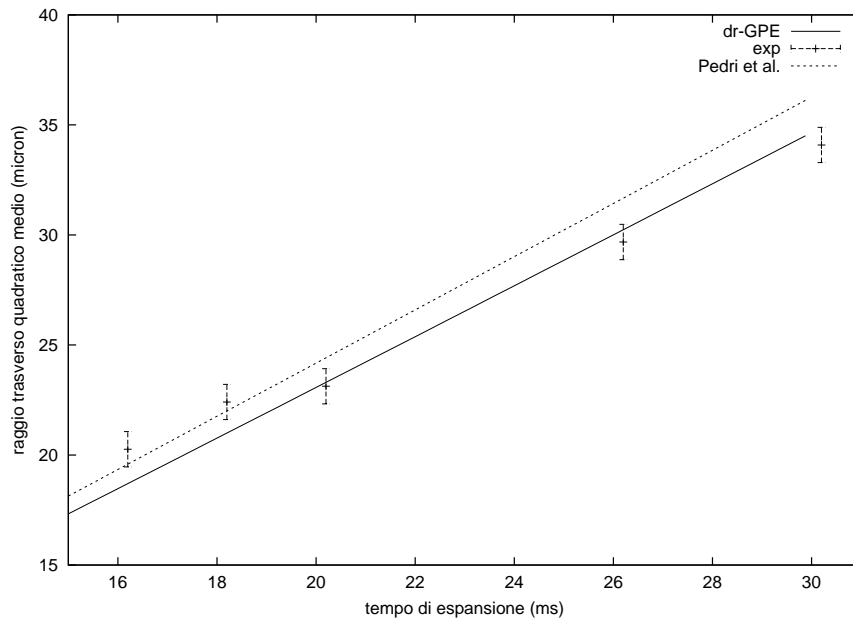


Figura 7.15: Raggio quadratico medio trasverso del picco centrale in funzione del tempo di espansione libera ( $N = 5 \times 10^4$ ,  $s = 4$ ). Dati sperimentali tratti da [PPS01].



## Capitolo 8

# Conclusioni

In questa Tesi abbiamo elaborato un modello unidimensionale per la descrizione dell'evoluzione di un condensato di Bose-Einstein a simmetria cilindrica, allungato a forma di sigaro, all'interno di un potenziale somma di una componente armonica dipendente dal tempo ed una parte assiale generica.

Questo risultato è stato ottenuto estendendo un recente lavoro di Salasnich *et al.* [Sal01, SPR02], ricavato per un condensato confinato in una trappola armonica statica, per mezzo di una trasformazione di *gauge* e *scaling* introdotta da Castin *et al.* [CD96, KSS96]. L'utilizzo della trasformazione permette di ricondursi ad un problema nel quale la funzione d'onda evolve in un potenziale costante nel tempo, anche nel caso di spegnimento completo della trappola. L'equazione finale, denominata *dr*-GPE, è formalmente unidimensionale, nel senso che dipende solo dalla coordinata assiale  $z$  (e dal tempo), ma la sua risoluzione permette di ottenere informazioni sulla parte radiale tramite la grandezza dinamica  $\sigma(z, t)$  che descrive, nell'ipotesi di forma trasversa gaussiana, la larghezza della funzione d'onda radiale che minimizza l'energia del sistema.

Il modello è in grado di descrivere sia lo stato fondamentale che l'evoluzione del sistema, caratteristica che gli altri modelli proposti per la riduzione di dimensionalità dell'equazione di Gross-Pitaevskii in generale non possiedono. La *dr*-GPE risulta essere un buon *Ansatz* per studiare un vasto ambito di situazioni fisiche, comprendenti l'espansione libera del sistema in presenza di un arbitrario potenziale assiale (ad esempio un reticolo ottico o un campo gravitazionale) oppure i modi normali di deformazione all'interno di una trappola armonica modulata nel tempo di un condensato immerso in un reticolo ottico (esperimento attualmente in corso al LENS di Firenze). In questi casi la possibilità di utilizzare un modello effettivo unidimensionale è di fondamentale importanza, in quanto permette di evitare calcoli molto onerosi sul problema completo tridimensionale.

Nella parte finale del lavoro abbiamo quindi analizzato numericamente la validità del nostro modello, studiando lo stato fondamentale di un gas

di bosoni condensati all'interno di una trappola armonica contenente una modulazione assiale periodica e l'espansione del sistema allo spegnimento della trappola. I risultati ottenuti sono in ottimo accordo con i dati raccolti in un recente esperimento compiuto al LENS, con il modello sviluppato dagli autori dell'articolo e con simulazioni effettuate sull'equazione completa tridimensionale.

Poichè moltissimi esperimenti sui condensati vengono realizzati in simmetria cilindrica, il modello qui introdotto si presta a numerose applicazioni future nel campo degli studi sui fenomeni di tunneling, sulla dinamica delle eccitazioni o delle oscillazioni collettive, sulle proprietà di coerenza o su nuove geometrie sperimentali ancora da realizzare.



## Appendice A

# Deduzione dell'*Ansatz* di scala

L'introduzione della forma tentativa 5.1 può essere dedotta come descritto in seguito. Si immagini un gas classico, la cui espansione è governata dall'equazione:

$$F = -\nabla(V(\mathbf{r}, t) + g\rho_{cl}(\mathbf{r}, t))$$

Se in  $t=0$  imponiamo la condizione di equilibrio  $F = 0$ , si ha

$$\rho_{cl} = -\frac{V}{g} + \text{cost} \equiv N|\psi_{TF}|^2,$$

ovvero la soluzione di equilibrio classica corrisponde al limite di Thomas-Fermi della soluzione quantistica.

In presenza di un generico potenziale armonico  $V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2}m \sum_1^3 \omega_j^2(t)r_j^2$ , l'evoluzione del sistema è una semplice dilatazione delle coordinate: ogni elemento infinitesimo segue la traiettoria

$$R_j(t) = R_j(0)\lambda_j(t)$$

ed il suo volume cresce nel tempo di un fattore  $\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)$ ; la densità del gas evolve allora come

$$\rho_{cl}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho_{cl}\left(\left\{\frac{r_j}{\lambda_j(t)}\right\}, 0\right)}{\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)}.$$

La legge di Newton  $m\ddot{R}_j(t) = F_j(\mathbf{R}(t), t)$  applicata alla traiettoria precedente dà:

$$\begin{aligned}
mR_j(0)\ddot{\lambda}_j(t) &= -\partial_{r_j} \left\{ V(\mathbf{R}(t), t) + g\rho_{cl}(\mathbf{r}, t) \right\} = \\
&= -\partial_{r_j} \left\{ V(\mathbf{R}(t), t) \right\} - g\partial_{r_j} \frac{\rho_{cl} \left( \left\{ \frac{r_j}{\lambda_j(t)} \right\}, 0 \right)}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} = \\
&= -m \sum \omega_j^2(t) R_j(t) + \frac{\partial_{r_j} V[\mathbf{R}(0), 0]}{\lambda_j \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} = \\
&= -m \sum \omega_j^2(t) R_j(0) \lambda_j(t) + \frac{m \sum \omega_j^2(0) R_j(0)}{\lambda_j \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}
\end{aligned}$$

(nella derivazione é stata usata la condizione di equilibrio, valida in  $t=0$ ,  $\nabla[U + g\rho] = 0$ ).

Semplificando il risultato ottenuto si ottiene l'equazione soddisfatta dai parametri di *scaling*:

$$\ddot{\lambda}_j(t) = \frac{\omega_j^2(0)}{\lambda_j(t)\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)} - \omega_j^2(t)\lambda_j(t)$$

con le condizioni iniziali  $\lambda_j(0) = 1$  e  $\dot{\lambda}_j(0) = 0$  (il gas é inizialmente in equilibrio).

Derivando l'equazione per la traiettoria si ottiene l'espressione della velocità:  $v_j(t) = \dot{\lambda}_j(t)r_j/\lambda_j(t)$ . Il gas classico in espansione ha dunque un momento pari a:

$$\mathbf{p}_{cl}(\mathbf{r}, t) = m\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = m\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t)\frac{\mathbf{r}}{\boldsymbol{\lambda}(t)}. \quad (\text{A.1})$$

## Appendice B

### Approssimazione $\nabla^2 \phi \approx \nabla_{\perp}^2 \phi$

Come descritto nel testo, la deduzione della NPSE e della sua estensione sviluppata in questo lavoro è stata possibile grazie ad una approssimazione, effettuata a livello dell'azione del sistema, che consiste nel trascurare la parte dell'operatore cinetico assiale applicata alla funzione d'onda radiale. È proprio questa approssimazione che permette di ottenere per la larghezza trasversa una equazione algebrica e non differenziale.

In assenza di tale approssimazione si avrebbe nell'azione (5.8) un termine aggiuntivo dato da:

$$\begin{aligned}
 \frac{\hbar^2}{2m} \langle \nabla_z^2 \rangle_{\phi} &= \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\langle \nabla_k^2 \rangle_{\phi(x,y,t;\sigma(k,t))}}{\lambda_z^2} = \\
 &= \frac{\hbar^2}{2m} \int \frac{dk}{\lambda_z^2} \tilde{\psi}^* \left\{ \int dr 2\pi r \cdot \phi^* \left[ -\frac{\sigma''}{\sigma^2} + \frac{2\sigma'^2}{\sigma^3} + \frac{r^2 \sigma''}{\sigma^4 \lambda_{\perp}^2} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. -\frac{4r^2 \sigma'^2}{\sigma^5 \lambda_{\perp}^2} + \left( -\frac{\sigma'}{\sigma^2} + \frac{r^2 \sigma'}{\sigma^4 \lambda_{\perp}^2} \right) \frac{r^2 \sigma'}{\sigma^3 \lambda_{\perp}^2} \right] \phi \right\} \tilde{\psi} \\
 &= -\frac{\hbar^2}{2m} \int dk \frac{\sigma'^2}{\sigma^2 \lambda_z^2} |\tilde{\psi}|^2 \tag{B.1}
 \end{aligned}$$

(si è posto  $\sigma' \equiv \partial_k \sigma$  e  $\sigma'' \equiv \nabla_k^2 \sigma$ ).

Questo porta alla forma finale:

$$\begin{aligned}
 S[\Psi] = \int dt \int dk \tilde{\psi}^*(k) \left\{ i\hbar \partial_t + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\lambda_z^2} \nabla_k^2 - \frac{m\omega_z^2(0)}{2} \frac{k^2}{\lambda_z \lambda_{\perp}^2} - \frac{1}{2} \frac{gN}{2\pi\sigma^2} \frac{|\tilde{\psi}|^2}{\lambda_z \lambda_{\perp}^2} + \right. \\
 \left. -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sigma^2 \lambda_{\perp}^2} - \frac{m\omega_{\perp}^2(0)}{2} \frac{\sigma^2}{\lambda_z \lambda_{\perp}^2} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\sigma'^2}{\sigma^2 \lambda_z^2} \right\} \tilde{\psi}(k) \tag{B.2}
 \end{aligned}$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange applicate alla forma non approssimata

danno la nuova equazione per la larghezza della gaussiana:

$$\left[ \sigma'' + \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\lambda_z^2}{\lambda_{\perp}^2} + 2a_s N \frac{\lambda_z}{\lambda_{\perp}^2} |\tilde{\psi}|^2 - \sigma'^2 - \frac{\lambda_z}{\lambda_{\perp}^2} \frac{\sigma^4}{a_{\perp}^4(t=0)} \right) \right] |\tilde{\psi}|^2 + \sigma' \partial_k |\tilde{\psi}|^2 = 0, \quad (\text{B.3})$$

questa volta di tipo differenziale e di soluzione non analitica.

La forma non approssimata non permette di ridursi ad un problema unidimensionale, in quanto le due equazioni di evoluzione sono ambedue di tipo differenziale e non è possibile sostituire la forma chiusa dell'una nell'espressione dell'altra; l'evoluzione è dunque ottenibile solo a patto di risolvere passo per passo le due equazioni accoppiate e il risultato è una evoluzione di tipo bidimensionale (in quanto l'ipotesi gaussiana ha ridotto il problema alla simmetria cilindrica).

Nell'espressione per l'energia (5.13) comparirebbe un termine uguale ed opposto a quello calcolato in (B.1):

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \langle \nabla_z^2 \rangle_{\phi} = \frac{\hbar^2}{2m} \int dk \frac{\sigma'^2}{\sigma^2 \lambda_z^2} |\tilde{\psi}|^2 \quad (\text{B.4})$$

Per  $\sigma$  dato da (5.9), si ha:

$$\partial_k \sigma = \frac{a_{\perp}}{4} \frac{2a_s N \cdot \partial_k (|\tilde{\psi}|^2)}{\left( \lambda_z + 2a_s N |\tilde{\psi}|^2 \right)^{\frac{3}{4}}}$$

e:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \langle \nabla_z^2 \rangle_{\phi} &= \frac{\hbar^2}{2m} \int dk \frac{1}{16} \frac{\left[ 2a_s N \cdot \partial_k (|\tilde{\psi}|^2) \right]^2}{\left( \lambda_z + 2a_s N |\tilde{\psi}|^2 \right)^2} |\tilde{\psi}|^2 \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \int dz \frac{\lambda_z^2}{16} \frac{\left[ 2a_s N \cdot \partial_z (|\psi|^2) \right]^2}{\left( 1 + 2a_s N |\psi|^2 \right)^2} |\psi|^2. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

## Appendice C

# Funzionale energia della *dr*-GPE

Riportiamo di seguito le espressioni necessarie per ricavare il funzionale energia (5.13).

Per quanto riguarda la parte assiale si ha:

$$\begin{aligned} P_z \psi &= \frac{P_k}{\lambda_z} \frac{e^{\frac{im}{2\hbar} k^2 \lambda_z \dot{\lambda}_z} \tilde{\psi}}{\sqrt{\lambda_z}} = \\ &= \frac{e^{\frac{im}{2\hbar} k^2 \lambda_z \dot{\lambda}_z}}{\sqrt{\lambda_z}} \left( \frac{P_k}{\lambda_z} + m \dot{\lambda}_z K \right) \tilde{\psi} \end{aligned}$$

( $K$  e  $P_k$  sono gli operatori di posizione e nel sistema di coordinate “ridotto”) e quindi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \int dz |P_z \psi|^2 &= \int dk \lambda_z \frac{1}{2m} \left| \frac{e^{\frac{im}{2\hbar} k^2 \lambda_z \dot{\lambda}_z}}{\sqrt{\lambda_z}} \left( \frac{P_k}{\lambda_z} + m \dot{\lambda}_z K \right) \tilde{\psi} \right|^2 = \\ &= \int dk \frac{1}{2m} \left| \left( \frac{P_k}{\lambda_z} + m \dot{\lambda}_z K \right) \tilde{\psi} \right|^2. \end{aligned}$$

Per la parte trasversa:

$$P_r \phi = \frac{\hbar}{i} \partial_r \phi = \frac{\hbar}{i} \frac{1}{\sqrt{\pi \sigma \lambda_\perp}} \left( \frac{im}{\hbar} r \frac{\dot{\lambda}_\perp}{\lambda_\perp} - \frac{r}{\sigma^2 \lambda_\perp^2} \right) e^{\frac{i}{2} r^2 \frac{\dot{\lambda}_\perp}{\lambda_\perp}} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2 \lambda_\perp^2}}$$

e dunque:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \int d^2 \mathbf{r} |P_\perp \phi|^2 &= \frac{1}{2\pi \sigma^2 \lambda_\perp^2} \int 2\pi r dr \left( \frac{\hbar^2}{m \sigma^4 \lambda_\perp^4} r^2 + m r^2 \frac{\dot{\lambda}_\perp^2}{\lambda_\perp^2} \right) e^{-\frac{r^2}{\sigma^2 \lambda_\perp^2}} = \\ &= \int dq q^2 \left( \frac{\hbar^2}{m \sigma^2 \lambda_\perp^2} + m \sigma^2 \dot{\lambda}_\perp^2 \right) e^{-q^2} = \\ &= \frac{\hbar^2}{2m \sigma_o^2 \lambda_\perp^2} + \frac{m}{2} \sigma^2 \dot{\lambda}_\perp^2. \end{aligned}$$



## Appendice D

# $\langle R_{\perp}^2 \rangle$ in approssimazione di Thomas-Fermi

In unità adimensionali, posto  $R_{TF}(z) \equiv \gamma^{-1} \sqrt{2\mu - z^2}$  (dove  $\mu \equiv \mu_{TF}$  è dato dall'eq. (6.8) ), si ha:

$$\begin{aligned}
 \langle R_{\perp}^2 \rangle_{TF} &= \int_V d^3\mathbf{r} r^2 |\Psi_{TF}|^2 = \\
 &= \int_{-\sqrt{2\mu}}^{\sqrt{2\mu}} dz \int_0^{R_{TF}(z)} 2\pi r dr r^2 \left[ \frac{\mu - \frac{1}{2}\gamma^2 r^2 - \frac{1}{2}z^2}{4\pi\delta} \right] = \\
 &= \frac{1}{2\delta} \int_{-\sqrt{2\mu}}^{\sqrt{2\mu}} dz \left[ \frac{R_{TF}^4(z)}{4} \left( \mu - \frac{1}{2}z^2 \right) - \frac{1}{12}\gamma^2 R_{TF}^6(z) \right] = \\
 &= \frac{1}{2\delta} \int_{-\sqrt{2\mu}}^{\sqrt{2\mu}} dz \left[ \frac{R_{TF}^4(z)}{4} \left( \frac{\gamma^2 R_{TF}^2(z)}{2} \right) - \frac{1}{12}\gamma^2 R_{TF}^6(z) \right] = \\
 &= \frac{\gamma^2}{48\delta} \int_{-\sqrt{2\mu}}^{\sqrt{2\mu}} dz \left( \frac{2\mu - z^2}{\gamma^2} \right)^3 = \\
 &= \frac{16\sqrt{2}}{105} \frac{\mu^{7/2}}{\delta\gamma^4}
 \end{aligned}$$

( $V$  è il volume nel quale la densità di Thomas-Fermi è definita positiva).

Invertendo la formula (6.8) si ricava un'espressione per  $\delta$  che può essere inserita nella prima equazione, ottenendo:

$$\sqrt{\langle R_{\perp}^2 \rangle_{TF}} = \sqrt{\frac{2}{7}} R_{TF}(z=0). \quad (D.1)$$

Si ricorda che, per avere una quantità dimensionata, sarà ora sufficiente utilizzare un valore dimensionato per la lunghezza  $R_{TF}(z=0)$ , ottenibile attraverso una misura sperimentale o la formula  $\sqrt{2\mu/m\omega_z^2}$ .





# Bibliografia

- [AEM95] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman and E. A. Cornell, *Science* **269**, 198 (1995).
- [AK98] B. P. Anderson and M. A. Kasevich, *Science* **282**, 1686 (1998).
- [AS70] M. Abramowitz and I. A. Stegun, “Handbook of mathematical functions” (Dover, New York, 1970).
- [ATM97] M. R. Andrews, C. G. Townsend, H. J. Miesner, D. S. Durfee, D. M. Kurn and W. Ketterle, *Science* **275**, 637 (1997).
- [BCF01] S. Burger, F. S. Cataliotti, C. Fort, P. Maddaloni, F. Minardi and M. Inguscio, *cond-mat/0108037* (2001).
- [BHE99] I. Bloch, T. W. Hänsch and T. Esslinger, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 3008 (1999).
- [BFDN92] J. Binney, Fisher, Dowrick and Newman, “The theory of critical phenomena: an introduction to the renormalization group”, Clarendon press, Oxford (1992).
- [Bog47] N. Bogoliubov, *J. Phys. (Moscow)*, **11**, 23 (1947).
- [Bos24] S. N. Bose, *Z. Phys.* **26**, 178 (1924).
- [B-SM98] K. Berg-Sørensen and K. Mølmer, *Phys. Rev. A* **58**, 1480 (1998).
- [BST95] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett and R. G. Hulet, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1687 (1995).
- [CBA86] S. Chu, J. E. Bjorkholm, A. Ashkin and A. Cable, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 314 (1986).
- [CBF01] F. S. Cataliotti, S. Burger, C. Fort, P. Maddaloni, F. Minardi, A. Trombettoni, A. Smerzi and M. Inguscio, *Science* **293**, 843 (2001).
- [CBY01] P. W. Courteille, V. S. Bagnato and V. I. Yukalov, “Bose-Einstein condensation of trapped atomic gases”, *Las. Phys.* **11**, 659 (2001).

- [CD96] Y. Castin and R. Dum, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 5315 (1996).
- [CSH00] F. S. Cataliotti, R. Scheunemann, T. W. Hänsch and M. Weitz in “Bose-Einstein Condensates and atom lasers”, edited by S. Martellucci, A. N. Chester, A. Aspect and M. Inguscio, Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York (2000).
- [DGPS99] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, S. Stringari, “Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases”, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999).
- [DMA95] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).
- [DMJ95] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. A. Joffe *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 5202 (1995).
- [EBH98] T. Esslinger, I. Bloch and T. W. Hänsch, *Phys. Rev. A* **58**, R2664 (1998).
- [Ein24] A. Einstein, *Sitz. Ber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss.* **22**, 261 (1924).
- [Hua87] K. Huang, “Meccanica statistica”, Zanichelli, Bologna (1997) [“Statistical Mechanics”, 2<sup>nd</sup> edition (Wiley, 1987)].
- [GBM01] M. Greiner, I. Bloch, O. Mandel, T. W. Hänsch and T. Esslinger, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 160405 (2001).
- [GL50] L. V. Ginzburg and L. D. Landau, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **20**, 1064 (1950).
- [GME02] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hänsch and I. Bloch, *Nature* **415**, 39 (2002).
- [Gri99] A. Griffin, “BEC and the new world of coherent matter waves”, *cond-mat/9911419* (1999).
- [Gro61] E. P. Gross, *Nuovo Cimento* **20**, 454 (1961).
- [JKP98] A. D. Jackson, G. M. Kavoulakis and C. J. Pethick, *Phys. Rev. A* **58**, 2417 (1998).
- [Kas50] A. Kastler, *J. Phys. Radium* **11**, 255 (1950).
- [KDH99] M. Kozuma, L. Deng, E. W. Hagley, J. Wen, R. Lutwak, K. Helmerston, S. L. Rolston and W. D. Phillips, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 871 (1999).

- [KDS-K99] W. Ketterle, D. S. Durfee and D. M. Stamper-Kurn, “Making, probing and understanding Bose-Einstein condensates”, cond/mat 9904034 (1999).
- [KSS96] Yu. Kagan, E. L. Surkov and G. V. Shlyapnikov, Phys. Rev. A **54**, R1753 (1996).
- [KSS97] Yu. Kagan, E. L. Surkov and G. V. Shlyapnikov, Phys. Rev. A **55**, R18 (1997).
- [MAK97] M. O. Mewes, M. R. Andrews, D. M. Kurn, D. S. Durfee, C. G. Townsend and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **78**, 582 (1997).
- [MMC01] O. Morsch, J. H. Müller, M. Cristiani, D. Ciampini and E. Arimondo, Phys. Rev. Lett. **87**, 140402 (2001).
- [MPC02] M. Modugno, L. Pricoupenko and Y. Castin, in preparazione (2002).
- [NR2nd] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling and B. P. Flannery, “Numerical Recipes in Fortran 77: the art of scientific computing”, Cambridge University Press, 2<sup>nd</sup> edition (1986-92).
- [PO56] O. Penrose, L. Onsager, Phys. Rev. **104**, 576 (1956).
- [Pit61] L. P. Pitaevskii, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **40**, 646 [Sov. Phys. JETP **13**, 451] (1961).
- [PPS01] P. Pedri, L. Pitaevskii, S. Stringari, C. Fort, S. Burger, F. S. Cataliotti, P. Maddaloni, F. Minardi and M. Inguscio, Phys. Rev. Lett. **87**, 220401 (2001).
- [PW98] A. S. Parkins and D. F. Walls, “The physics of trapped dilute-gas Bose-Einstein condensates”, Phys. Rep. **303**, 1 (1998).
- [QO] per un'introduzione alla teoria di Jaynes-Cummings, ai *dressed states* ed in generale all'interazione radiazione-materia si vedano ad esempio:
- C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc and G. Grynberg, “Atom-photon interactions: basic processes and applications” (Wiley, New York, 1992).
- C. Cohen-Tannoudji, “Manipulating atoms with photons”, Rev. Mod. Phys. **70**, 707 (1998).
- M. O. Scully, M. S. Zubairy, “Quantum optics”, Cambridge University press, Cambridge (1997).
- [RPC87] E. L. Raab, M. Prentiss, A. Cable *et al.*, Phys. Rev. Lett. **59**, 2631 (1987).

- [Sal01] L. Salasnich, cond-mat/0106493 (2001).
- [SPR02] L. Salasnich, A. Parola and L. Reatto, cond-mat/0201395.
- [SCG99] D. M. Stamper-Kurn, A. P. Chikkatur, A. Görlitz, S. Inouye, S. Gupta, D. E. Pritchard and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **83**, 2876 (1999).
- [S-KAC98] D. M. Stamper-Kurn, M. R. Andrews, A. P. Chikkatur *et al.*, Phys. Rev. Lett. **80**, 2027 (1998).
- [SZ98] M. J. Steel and W. Zhang, cond-mat/9810284 (1998).
- [TBJ00] M. Trippenbach, Y. B. Band and P. S. Julienne, Phys. Rev. A **62**, 023608 (2000).
- [TI99] G. M. Tino and M. Inguscio, “Experiments on Bose-Einstein condensation”, Riv. Nuovo Cim. vol. **22**, n. 4 (1999).